Math P.
131 vo - 3
Euler

Leonhard Eulers

vollständige Anleitung

zur

Algebra.

Dritter Theil,

enthaltend

die Zusätze von de la Grange,

aus dem Französischen übersezt, und mit Erläuterungen und einigen dahin einschlagenden Abhandlungen begleitet,

von

Hofrath Kaußler,
Gouverneur der Herzoglich-Wirtembergischen Edelknaben.

Frankfurt am Main,
bei Johann Georg Fleischer 1796.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Die Geometer des vorigen Jahrhunderts haben sich sehr viel mit der unbestimmten Analytik, welche gewöhnlich Diophanteische Analysis genannt wird, beschäftiget; Aber gleichwol waren Bachet und Fermatius die einzigen, die den Diophanteischen Erfindungen neue beigefügt haben.

Dem ersteren verdanken wir eine vollständige Methode zur Auflösung aller unbestimmten Gleichungen des ersten Grads in

ganzen Zalen a). Der zweite ist der Erfinder einiger Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen von höheren Graden, als dem zweiten b), sodann eines besondern Beweises, daß die Summe oder der Unterschied zweier Biquadrate niemals ein Quadrat werden könne c), ferner mehrerer schwe-

a) Man sehe unten das dritte Kapitel. Uebrigens ist hier nicht die Rede von seinem Commentar über den Diophant, weil dieses an sich vortrefliche Werk keine neue Erfindungen enthält.

b) Es sind eben diejenigen, die im achten, neunten und zehnten Kapitel des Eulerischen Werks abgehandelt sind. Billi hat sie aus den verschiedenen Schriften des Fermatius gesammelt, und in der neuen Auflage des Diophant, den Fermatius der jüngere vorher schon herausgegeben hatte, bekannt gemacht.

c) Diese Methode steht im dreizehnten Kapitel des Eulerischen Werks. Die Grundsätze

ſchwehren Probleme und endlich verſchiedner Lehrſätze über die ganzen Zalen, zu denen aber die Beweiſe meiſtens erſt von Euler in den Petersb. Comment. gegeben worden ſind d).

Dieſer Theil der Analyſis wurde in unſerm Jahrhundert beinahe ganz vernachläſſiget, und, ſo viel ich weiß, iſt Euler der

ſätze derſelben befinden ſich in der Anmerkung des Fermatius nach der XXVI. Aufgabe des VI. Buchs Diophants.

d) Die Probleme und Lehrſätze, von denen hier die Rede iſt, ſtehen zerſtreut in den Anmerkungen des Fermatius zu den Diophanteiſchen Aufgaben in Briefen, die in dem Werke: Opera Mathematica &c. enthalten ſind; und endlich im 2ten Bande der Werke des Wallis. Man findet auch in den Berl. Denkſchriften v. J. 1770 ꝛc. die Beweiſe einiger Lehrſätze dieſes Schriftſtellers, die bisher noch nicht erwieſen worden waren.

einzige, der darin etwas geleistet hat. Aber die vielen und schönen Erfindungen dieses grossen Geometers haben uns zum Theil wieder schadlos gehalten. Die Petersburger Commentare sind voll von den Erfindungen dieses berühmten Mannes, und die Liebhaber der Diophanteischen Analysis können darinn viele nüzliche Lehrsätze finden. Allein bei allem diesem mangelte es bisher an einem Werke, worinn diese Wissenschaft methodisch behandelt ist, und wo die vorzüglichsten Regeln für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen deutlich vorgetragen werden.

Ob nun aber gleich das Eulerische Werk diesem gedoppelten Zwecke entspricht, so hab ich dennoch, um dasselbe noch vollständiger zu machen, einige Zusätze beizufügen für nöthig erachtet, worüber ich mich noch kürzlich erklären will.

Die

Die Theorie der fortlaufenden Brüche ist zwar ungemein nüzlich in der Rechenkunst, indem manche Probleme, die auf jedem andern Weg oft unauflösbar wären, sich durch dieselbe sehr leicht auflösen lassen. Aber noch wichtigere Dienste leistet sie bei Auflösung derjenigen unbestimmten Probleme, wo nur ganze Zalen verlangt werden. Und diß war der Grund, warum ich diese Theorie hier vorgetragen habe, welche ich übrigens so auseinander zu setzen bemühet war, daß sie leicht verstanden werden kann. Da sie in den meisten Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra fehlt, so ist sie den Geometern wenig bekannt.

Hierauf gebe ich neue Anwendungen dieser Theorie. Ich bestimme die Minima, welche bei unbestimmten Formeln mit zwei unbekannten Grössen, besonders bei denen von der zweiten Ordnung, statt finden können,

und

und beweise in Absicht auf diese leztere merkwürdige Sätze, die noch nicht bekannt waren, oder die bisher nicht allgemein und direkt bewiesen worden sind. Vorzüglich wird man im dritten Kapitel eine besondre Methode finden, die wirklichen Wurzeln der Gleichungen des zweiten Grads in fortlaufende Brüche zu verwandeln, und weiter unten einen strengen Beweiß, daß diese Brüche nothwendig immer periodisch seyn müssen.

Die übrigen Zusätze betreffen die Auflösung der unbestimmten Gleichungen. Bachet hatte im Jahr 1624 eine vollständige Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grad gegeben. Die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade erschien erst im Jahr 1769 in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften. Man gibt sie hier vereinfacht und so allgemein, daß hierinn nichts

mehr

mehr zu wünschen übrig bleibt. Was aber die unbestimmten Gleichungen von höheren Graden, als der zweite, anbetrift, so hat man nur besondere Methoden für einige einzelne Fälle, und es ist zu vermuthen, daß die allgemeine Auflösung derselben eben so unmöglich ist, als die Auflösung derjenigen bestimmten Gleichungen, die über den vierten Grad steigen.

Endlich enthält das lezte Kapitel Untersuchungen über diejenigen Funktionen, welche die Eigenschaft haben, daß das Produkt zweier oder mehrerer derselben jeder einzelnen ebenfalls ähnlich wird. Man findet darinn eine allgemeine Methode zur Bestimmung dieser Funktionen, deren Nutzen ich bei mehreren unbestimmten Problemen, die durch die bisher bekannten Methoden nicht aufgelößt werden können, deutlich gezeigt habe.

Diß

Diß sind also die vorzüglichsten Gegenstände dieser Zusätze, die ich leicht hätte noch mehr erweitern können, wenn ich nicht befürchtet hätte, allzuweitläufig zu werden. Ich wünsche, daß die darinn abgehandelten Materien die Aufmerksamkeit der Geometer verdienen, und ihre Liebe zu einem Theil der Analytik wieder aufwecken mögen, der es würdig ist, daß sie ihren Scharfsinn an demselben üben.

Vorrede
zur
Uebersetzung.

Man übergibt hier den Liebhabern der Analytik die Uebersetzung derjenigen Zusätze, womit de la Grange das Eulerische Werk über die Algebra bereicherte. Sie machen gleichsam den dritten Theil dieses berühmten Lehrbuchs aus, und sind so reich an innerem Gehalte, daß, so vortreflich auch die Eulerische Analytik an und für sich seyn mag, dieselbe dennoch, ohne jene Zusätze, äusserst unvollständig bleibt. Um so mehr

ist

iſt es daher zu verwundern, daß noch keine deutſche Ausgabe des Euleriſchen Werks mit dieſen koſtbaren Vermehrungen geziert worden iſt.

Um aber den Beſitzern der Euleriſchen Algebra nicht doppelte Koſten zu verurſachen, habe ich, anſtatt eine neue vollſtändige Ausgabe dieſes Werks zu veranſtalten, jene Zuſätze von de la Grange als ein eigenes Werk, als einen Anhang oder dritten Theil von jenem herausgegeben, der zwar abgeſondert geleſen werden kann, aber gleichwol auf die ſchon öfters angeführte Algebra einen unmittelbaren Bezug hat, ja deſſen Mangel ſogar dieſe leztere ganz unvollſtändig macht. Und nun noch ein paar Worte von der Ueberſetzung ſelbſt.

Daß

Daß ich alles Mögliche angewandt habe, die Sätze mit ihren Beweiſen richtig und deutlich auszudrücken, verſteht ſich von ſelbſt. Wo aber bei den öfters ſehr verwickelten Schlüſſen, und bei den manchmal äuſſerſt kurz zuſammen gezogenen Rechnungen Erläuterungen und Entwickelungen nöthig ſchienen, da hab ich ſolche in den unten beigefügten Noten, an einigen der ſchwerſten Stellen angebracht. Doch, da das Buch nie für die erſten Anfänger geſchrieben ſeyn kann, ſo bin ich mit denſelben ſo ſparſam, als möglich, geweſen, um nicht überflüßig weitläufig zu werden.

Endlich habe ich es gewagt, dieſer Ueberſezung einige kleine Abhandlungen beizufügen, die ſich ebenfals auf das Euleriſche Werk beziehen, und die ich ſchon vor mehreren Jahren verfertiget habe, noch ehe ich

die Zuſäze des de la Grange, mit denen ſie übrigens nichts gemein haben, kennen lernte.

Die erſte derſelben iſt ein vollſtändiger Beweiß des Binomiſchen Lehrſazes, der, nach der Art, wie er geführt iſt, vielleicht nicht ganz überflüſſig ſeyn dürfte.

Die zweite enthält eine Methode, die Theiler der Zalen zu finden, und die dritte und übrigen mehrere Auflöſungen merkwürdiger Probleme aus der unbeſtimmten Analytic nebſt Betrachtungen über das Problem $\frac{x^2 - B}{A}$ zu einer ganzen Zal zu machen, welches ich allgemein aufzulöſen lehrte.

Es iſt zwar gewagt, in dieſer Wiſſenſchaft nach einem Euler und de la Grange aufzutretten; allein auch hier läßt ſich vielleicht mit la Fontaine ſagen:

Mais ce champ ne ſe peut tellement moiſſonner
Que les derniers venus n'y trouvent à glaner.

Verbesserungen.

S.	17	Z. 2	anstatt Denkwürdigkeiten lese Denkschriften
	23	19	= ähnlich l. ähnliche
	34	20	= vor l. für
	37	26	= weniger einfachen l. einfacheren
	39	25	= = oder l. oder =
	53	4	= forlaufenden l. fortlaufenden
	76	4	= wenn l. wann
	144	26	= A^{II}— l. A^{II}=
	222	3	= in plus oder minus l. bejaht oder verneint

Ferner überall, wo Denkwürdigkeiten steht, lese man Denkschriften, und im achten Kapitel anstatt in plus oder in minus muß es heissen bejaht oder verneint.

Erstes Kapitel.

Von den fortlaufenden Brüchen. (Fractiones continuae.)

§. 1.

Da die Theorie der fortlaufenden Brüche gewöhnlich in den Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra fehlt, und daher den Geometern wenig bekannt ist; so wird es um so mehr der Mühe werth seyn, gegenwärtige Zusätze mit einer kurzen Theorie derselben anzufangen, als wir in der Folge öfters Gebrauch davon machen werden. Ueberhaupt wird der Name fortlaufender Bruch jedem Ausdruk gegeben, der in der Gestalt

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \&c.}}}$$

enthalten ist, wo die Grössen α, β, γ, δ &c. und b, c, d &c. ganze bejahte oder verneinte Zahlen sind. Wir betrachten aber in gegenwärtiger Abhandlung nur diejenigen, bei welchen die Zäler b, c, d &c. der

Einheit gleich sind, und deren allgemeiner Ausdruk also

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

ist; wo übrigens α, β, γ, δ &c. jede bejahte oder verneinte Zal vorstellen können; denn nur die unter unter lezterer Gestalt enthaltenen Brüche kommen in der Anwendung wirklich vor, indeß die ersteren beinahe gar nicht gebraucht werden.

§. 2.

Brounker ist, so viel ich weiß, der Erste, der die fortlaufenden Brüche erdacht hat. Derjenige ist bekannt, durch den er das Verhältniß des um einen Zirkel beschriebenen Quadrats zur Zirkelfläche ausdrükte, und der

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \&c.}}}$$

ist. Man weiß aber die Methode nicht, deren er sich dabei bediente. Nur einige wenige, diesen Gegenstand betreffende, Untersuchungen finden sich in der arithmetica infinitorum, worinn Wallis auf eine zwar sinnreiche, aber sehr indirekte Art, die Uebereinstimmung des Brounkerischen Ausdruks mit dem seinigen, welcher, wie bekannt, $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$ ist, beweiset.

Ueber-

Ueberdiß gibt er eine Methode an, alle Arten von fortlaufenden Brüchen auf gewöhnliche zu bringen. Es scheint aber, als ob weder der eine, noch der andere dieser berühmten Geometer etwas von den vorzüglichsten Eigenschaften und dem grossen Nutzen derselben gewußt habe. Weiter unten werden wir sehen, daß der Ruhm hievon vorzüglich dem Huygens gebühre.

§. 3.

Man geräth immer sehr natürlich auf solche fortlaufende Brüche, so oft gebrochene oder irrationale Gröſſen in Zalen ausgedrükt werden sollen. Um diß zu zeigen, wollen wir annehmen, es sey der Werth irgend einer gegebenen Gröſſe a zu suchen, welche aber nicht durch eine ganze Zal ausgedrükt ist. Der einfachste Weg ist nun dieser, daß man diejenige ganze Zal sucht, welche dem Werth von a am nächsten kommt, und von diesem nur um einen Bruch unterschieden ist, der kleiner, als die Einheit ist. Diese Zal sey α; so wird also $a - \alpha$ diesem Bruch gleich seyn, der kleiner als die Einheit ist. Es muß demnach hinwiederum $\frac{1}{a-\alpha}$ gröſſer als die Einheit seyn. Es sey daher $\frac{1}{a-\alpha} = b$, und da also b gröſſer als die Einheit ist, so wird aufs neue wiederum eine ganze Zal β gesucht werden können, die dem Werth b am nächsten kommt. Es ist daher auch $b - \beta$ einem Bruche gleich, der kleiner als die Einheit ist; mithin muß $\frac{1}{b-\beta}$ gröſſer als die

Einheit sey. Dieser Werth heisse c. Damit nun c gefunden werde, suche man gleichfalls diejenige ganze Zal γ, die c am nächsten kommt; es muß also wiederum $c-\gamma$ kleiner, und mithin auch $\frac{1}{c-\gamma} = d$ gröſſer als die Einheit seyn, u. s. w. Auf diese Art erhellet also, wie der Werth von a nach und nach zu erforschen sey, und dieser Zweck muß sehr leicht und schnell erreicht werden, da man nichts als ganze Zalen hiezu gebraucht, deren jede sich dem gesuchten Werth, so viel als möglich, nähert.

Da aber $\frac{1}{a-\alpha} = b$, so ist $a-\alpha = \frac{1}{b}$ und $a = \alpha + \frac{1}{b}$. Ferner, da $\frac{1}{b-\beta} = c$, so ist auch $b = \beta + \frac{1}{c}$, und eben so auch $c = \gamma + \frac{1}{d}$ &c. Wenn man also diese Werthe nach und nach substituirt, so ergibt sich

$$a = \alpha + \frac{1}{b}$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{c}}$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{d}}}$$

und überhaupt

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

Es wird nicht überflüssig seyn, hier zu bemerken, daß jede der Zalen α, β, γ &c. welche, wie wir gesehen haben, diejenigen ganzen Werthe vorstellen, welche den Grössen a, b, c &c. am nächsten kommen, auf zwei verschiedene Arten genommen werden könne, indem für den ganzen Werth, der einer gegebenen Grösse am nächsten kommt, sowol die eine als die andere der zwei ganzen Zalen gewählt werden kann, zwischen welche dieselbe hineinfällt. Indessen wird doch ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Arten, die nächsten Werthe zu nehmen, in Absicht auf den daraus entspringenden fortlaufenden Bruch, statt finden. Denn werden immer die nächst kleineren Werthe genommen, so sind die Nenner β, γ, δ &c. alle bejaht. Im Gegentheil werden diese alle verneint, wenn man die nächst grösseren Werthe nimmt; nimmt man aber bald die kleineren, bald die grössern, so sind dieselben bald bejaht, bald verneint.

In der That, wenn α kleiner als a ist, so wird $a - \alpha$ eine bejahte Grösse seyn, mithin b ebenfalls, so wie auch β. Ist aber α grösser als a, so wird $a - \alpha$, so wie auch b und β verneint. Eben so, wenn β kleiner als b ist, so wird $b - \beta$ sowol, als auch c, und folglich auch γ, jederzeit bejaht seyn. Ist aber β grösser als b, so muß $b - \beta$, und folglich auch c und γ verneint werden, u. s. w.

Wenn aber in der Folge von verneinenden Grösſen die Rede iſt, ſo verſtehe ich unter kleineren ſolche, die, bejaht genommen, gröſſer wären. Nichts deſto weniger aber wird es hie und da der Fall ſeyn, Grösſen blos in Rükſicht auf ihren abſoluten Werth mit einander zu vergleichen; dann aber werden wir vorher erinnern, daß von den Zeichen abſtrahirt werden müſſe.

Es iſt auch noch zu bemerken, daß, wenn unter den Grösſen b, c, d &c. eine gefunden wird, welche einer ganzen Zal gleich iſt, alsdann der fortlaufende Bruch hier aufhöre, weil auch dieſe Grösſe beibehalten werden kann. Es ſey z. B. c eine ganze Zal, ſo wird der fortlaufende Bruch, der den Werth von a ausdrükt, folgender ſeyn.

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}}$$

In der That erhellet, daß $\gamma = c$ genommen werden müſſe, diß gäbe $d = \frac{1}{c-\gamma} = \frac{1}{0} = \infty$, folglich $\delta = \infty$. Es wäre alſo

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\infty}}}$$

wo die folgenden Glieder gegen die unendliche Grösſe ∞ verſchwinden; aber $\frac{1}{\infty} = 0$, folglich erhält man blos

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}}$$

Dieſer

Dieſer Fall wird ſich jedesmal ereignen, ſo oft die Gröſſe a commenſurabel iſt, das iſt, ſo oft ſie durch einen rationalen Bruch ausgedrükt iſt. Wenn aber a eine irrationale oder transcendente Gröſſe vorſtellt, ſo wird der fortlaufende Bruch, ohne irgendwo abzubrechen, nothwendig ins Unendliche fortgehen.

§. 4.

Wir wollen annehmen, die Gröſſe a ſey ein gewöhnlicher Bruch $\frac{A}{B}$, wo A und B gegebene Zalen vorſtellen. Hier iſt nun klar, daß die ganze Zal α, welche ſich dem Werthe $\frac{A}{B}$ am meiſten nähert, der Quotient ſeyn müſſe, den man erhält, wenn A durch B dividirt wird. Wenn alſo die Diviſion auf die gewöhnliche Art verrichtet worden, und α der Quotient und $+ C$ der Ueberreſt iſt, ſo wird $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$ und demnach $b = \frac{B}{C}$ ſeyn *). Nun ſey wiederum β derjenige Werth in ganzen Zalen, der dem Bruch $\frac{B}{C}$ am nächſten kommt, und den man mithin eben-

*) Nemlich wenn A mit B dividirt α gibt, und C der Ueberreſt iſt, ſo muß $A = B\alpha + C$, mithin $\frac{B}{A} = \alpha + \frac{C}{B}$ und daher $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$ ſeyn; aber $b = \frac{1}{a - \alpha} = \frac{1}{\frac{A - \alpha}{B}}$, alſo auch $= \frac{1}{\frac{C}{B}} = \frac{B}{C}$.

falls durch die Division von C in B findet, D aber der Ueberrest; so wird man auf eine ähnliche Art $b - \beta = \frac{D}{C}$ und folglich $c = \frac{C}{D}$ erhalten. Man dividire ferner C durch D, so wird der Quotient γ seyn, u.s.w.: woraus also folgende sehr einfache Regel, jeden Bruch in einen fortlaufenden Bruch zu verwandeln, hergeleitet werden kann:

Man dividire zuerst den Zäler des gegebenen Bruchs durch seinen Nenner, und heisse den Quotienten α; man dividire ferner den Nenner durch den Ueberrest, und heisse den Quotienten β; man dividire sodann den ersten Ueberrest durch den zweiten, und heisse den Quotienten γ, und so fahre man fort, immer den vorlezten Ueberrest durch den lezteren zu dividiren, bis man endlich auf eine Zal kommt, wo es keinen Ueberrest mehr gibt, (welches nothwendig geschehen muß, weil alle Ueberreste ganze Zalen sind, die je mehr und mehr abnehmen); so wird man den fortlaufenden Bruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

erhalten, der dem gegebenen Bruche gleich ist.

§. 5.

Gesezt, es sey der Bruch $1\frac{106}{887}$ in einen fortlaufenden zu verwandeln; so dividire man also 1103 durch 887, woraus der Quotient 1 und Ueberrest 216 entspringt. Nun dividire man 887 durch 216, welches

welches den Quotienten 4 und Ueberreſt 23 gibt. Ferner 216 durch 23 dividirt, gibt zum Quotienten 9, und zum Ueberreſt 9; 23 durch 9 dividirt zum Quotienten 2 und Ueberreſt 5; 9 durch 5 dividirt gibt zum Quotienten 1 und zum Ueberreſt 4. Sodann 5 mit 4 dividirt gibt zum Quotienten 1, und Ueberreſt 1. Endlich 4 durch 1 dividirt gibt zum Quotienten 4 und zum Ueberreſt 0; ſo daß alſo die Operation hier aufhört. Wenn man nun alle gefundene Quotienten der Ordnung nach ſammelt, ſo ergibt ſich die Reihe 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, aus welcher folgender fortlaufende Bruch entſteht

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$$

§. 6.

Da bei der gewöhnlichen Art zu dividiren immer diejenige ganze Zal zum Quotienten genommen wird, welche dem gegebenen Bruch entweder gleich, oder kleiner als derſelbe iſt, ſo folgt hieraus, daß man durch die vorhergehende Methode nur ſolche fortlaufende Brüche bekomme, deren Nenner alle bejahte Zahlen ſind.

Man kann aber auch zum Quotienten diejenige ganze Zahl nehmen, welche unmittelbar gröſſer iſt,

als der Werth des Bruchs, wenn dieser leztere nicht auf eine ganze Zal gebracht werden kann, und daher darf man den Werth des durch die gewöhnliche Operation gefundenen Quotienten nur um eine Einheit vermehren: Alsdann wird der Ueberrest, und folglich auch der folgende Quotient nothwendig verneint werden. Auf diese Art kann man also nach Belieben die Glieder des fortlaufenden Bruchs bejaht oder verneint machen.

Im vorhergehenden Beispiel hätte man bei der Division von 1103 durch 887 statt des Quotienten 1 auch 2 annehmen können. In diesem Fall aber wird alsdann der Ueberrest = — 671; dividirt man nun aufs neue 887 durch — 671, so ist der Quotient entweder — 1 und der Ueberrest 216, oder es ist der Quotient — 2 und der Ueberrest — 445. Wenn wir nun den grösseren Quotienten — 1 nehmen, so wird der Ueberrest — 671 durch den Ueberrest 216 dividirt werden müssen, woraus entweder der Quotient — 3 und Ueberrest — 23, oder der Quotient — 4 und Ueberrest 193 entspringen. Bei der folgenden Division nehme man den grösseren Quotienten — 3 und dividire also 216 durch den Ueberrest — 23, welches entweder den Quotienten — 9 und Ueberrest 9 oder den Quotienten — 10 und Ueberrest — 14 gibt, und so fort. Auf diese Art erhält man:

$$\frac{1103}{887} = 2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{-9 + \&c.}}}$$

wo alle Nenner verneint sind.

§. 7.

§. 7.

Es kann aber jeder verneinte Nenner bejaht werden, wenn man das Zeichen des Zälers verändert; aber dann muß man auch das Zeichen des folgenden Zälers verändern, weil offenbar

$$\mu + \cfrac{1}{-\nu + 1 \;+\; \cfrac{}{+\pi + \&c.}} = \mu - \cfrac{1}{\nu - 1 \;+\; \cfrac{}{\pi + \&c.}}$$

ist.

Ferner kann man auch, nach Belieben, alle verneinte Zeichen des Bruchs hinwegschaffen, und denselben in einen andern verwandeln, dessen Glieder alle bejaht sind, weil überhaupt

$$\mu - \cfrac{1}{\nu + \&c.} = \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\upsilon - 1 + \&c.}}$$

ist, wie leicht bewiesen werden kann, wenn man diese beiden Grössen in gewöhnliche Brüche verwandelt. *) **)

Man

*) $\mu - \cfrac{1}{\upsilon} = \mu\,\cfrac{\nu - 1}{\nu}$ und $\mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\upsilon - 1}}$

$= \mu - 1 + \cfrac{1}{\upsilon : \nu - 1} = \mu - 1 + \cfrac{\upsilon - 1}{\nu}$

$= \cfrac{\mu\nu - \nu + \nu - 1}{\nu} = \cfrac{\mu\nu - 1}{\nu}$, folglich ꝛc.

Anm. d. Ueb.

Man kann auch auf ähnliche Art verneinte Glieder ſtatt der bejahten einführen, weil

$$\mu + \cfrac{1}{\nu + \&c.} = \mu + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 1 + \&c.}}$$

durch welche Verwandlungen öfters ein ſolcher Bruch einfacher, und auf eine kleinere Anzal von Gliedern gebracht wird, welches immer ſtatt findet, ſo oft einige

**) Aus dem Satze, daß $a - \cfrac{1}{b} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1}}$

ſey, folgt nun auch unmittelbar, daß

$$a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c-1}}}}$$

iſt; denn, wenn $b - \cfrac{1}{c} = g$ geſezt wird, ſo iſt

$$a - \cfrac{1}{g} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{g-1}} \text{ oder } = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1-\cfrac{1}{c}}}$$

Nun ſey $b - 1 = \alpha$; ſo iſt $a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1-\cfrac{1}{c}}}$

einige Nenner der bejahten oder verneinten Einheit gleich sind. Um

$$= a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha - 1 + \cfrac{1}{c}}}$$

aber $\alpha - 1 = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c - 1}}$, folglich

$$a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 1 - \cfrac{1}{c}}} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c - 1}}}}$$

$$= a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c - 1}}}}$$

welcher Ausdruk demnach $= a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c}}$ ist. Ganz auf eben dieselbe Art kann nun auch der Beweis für $a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \cfrac{1}{d}}}$ und so weiter, geführt werden.

Anm. d. Ueb.

Um ferner einen fortlaufenden Bruch zu erhalten, der in Absicht auf den Werth der gegebenen Grösse am meisten convergirt, darf man nur statt α, β, γ &c. diejenigen ganzen Zalen nehmen, die den Grössen a, b, c &c. am nächsten kommen, sie mögen nun kleiner, oder grösser, als diese seyn. Es ist aber leicht einzusehen, daß, wenn z. B. für α nicht diejenige ganze Zal genommen wird, die sich a am meisten nähert, sie sey nun grösser oder kleiner, die folgende Zal β nothwendig der Einheit gleich werden müsse; denn, da sodann der Unterschied zwischen a und α grösser als $\frac{1}{2}$ ist, so wird $b = \frac{1}{a - \alpha}$ kleiner als 2, und mithin also β der Einheit gleich seyn. Und endlich so oft bei einem fortlaufenden Bruch Nenner vorkommen, die der Einheit gleich sind, so oft ist es ein Beweiß, daß die vorgehenden Nenner nicht so nahe als möglich genommen worden sind, und daß folglich der Bruch, durch die Vermehrung oder Verminderung dieser Nenner um eine Einheit, einfacher gemacht werden kann, welches durch die vorhergehenden Formeln leicht zu bewerkstelligen ist, ohne daß darum die Rechnung von neuem wieder vorgenommen werden muß.

§. 8.

Die Methode des 4. §. kann auch bei Verwandlung einer jeden irrationalen oder transcendentischen Grösse in einen fortlaufenden Bruch angewandt werden, wenn nur dieselbe vorher in Decimalbrüchen ausgedrükt wird. Da aber der Werth in Decimalbrüchen jederzeit an und für sich der nächste ist, und man durch

durch Vermehrung der lezteren Decimalſtelle um eine Einheit, zwei Gränzen erhält, zwiſchen welchen der wahre Werth der gegebenen Gröſſe gefunden werden ſoll; ſo muß man, damit dieſe Gränzen nicht überſchritten werden, eben denſelben Calcul mit beiden Brüchen vornehmen, und nur diejenigen Quotienten nachher beibehalten, welche durch beide Operationen erhalten werden. Es ſoll z. B. das Verhältnis der Peripherie des Kreiſes zum Diameter durch einen fortlaufenden Bruch ausgedrükt werden. Dieſes Verhältnis iſt 3, 1415926535 ..... woraus man alſo nach der obenerwähnten Methode den Bruch $\frac{3141592653}{1000000000}$ erhält. Wenn nun nur der Bruch $\frac{314159}{100000}$ genommen wird, ſo finden ſich die Quotienten 3, 7, 15, 1 &c. Nimmt man aber den gröſſern Bruch $\frac{31416}{10000}$, ſo würden die Quotienten 3, 7, 16 &c. gefunden werden, ſo daß der dritte Quotient ungewiß wäre. Daraus ſieht man alſo, daß, damit der Bruch über 3 Stellen fortgeſezt werden könne, man nothwendiger Weiſe einen Werth für die Peripherie annehmen müſſe, der mehr als 6 Ziffern hat.

Wenn aber der auf 35 Decimalſtellen berechnete Ludolphiſche Werth genommen wird, nehmlich 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, und man ebendieſelbe Operation mit dieſem Bruch und demjenigen macht, deſſen leztere Ziffer um eine Einheit gröſſer und alſo = 9 iſt; ſo findet ſich folgende Reihe von Quotienten, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, woraus

Peripherie

$$\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{&c.}}}}}}}$$

Da hier einige Nenner vorkommen, welche $=1$ sind, so kann der Bruch einfacher gemacht werden, wenn man, nach Anleitung des §. 7. verneinte Glieder einführt, wodurch man erhält:

$$\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294-\cfrac{1}{3-\frac{1}{3}+\text{&c.}}}}}$$

Oder:

$$\frac{\text{Per.}}{\text{Diam.}} = 3+\cfrac{1}{-7+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{-294+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{-3+\text{&c.}}}}}}$$

§. 9.

Ich habe an einem andern Orte gezeigt, wie die Theorie der fortlaufenden Brüche auf die Auflösung der Gleichungen in Zalen angewandt werden könne, für

für welche man bisher nur unvollkommne und unzulängliche Methoden hatte. (Man ſehe die Denkwürdigkeiten der Berliner Akademie Jahrgänge 1767 und 1768). Die ganze Schwierigkeit beſteht darin, in jeder Gleichung den nächſten ganzen Werth zu finden, er ſey nun gröſſer oder kleiner, als die geſuchte Wurzel. Ich war der erſte, der ſichere und allgemeine Regeln gab, nicht nur die wirkliche, bejahte und verneinte, gleiche oder ungleiche Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu erkennen, ſondern auch auf eine leichte Art die Gränzen der wirklichen Gröſſen zu finden, welche unmögliche Wurzeln geben. Wenn daher die unbekannte Gröſſe einer vorgegebenen Gleichung x heißt, ſo ſuche man zuerſt diejenige ganze Zal α, welche der geſuchten Wurzel am nächſten kommt; daher wird nach §. 3. $x = \alpha + \frac{1}{y}$ ſeyn, (wo x, y, z, hier das bedeuten, was dort a, b, c &c. vorſtellten); wenn nun dieſer Werth ſtatt x geſezt wird, ſo ergibt ſich, nach dem die Brüche hinweggeſchaft worden, eine Gleichung von ebendemſelben Grad, in y ausgedrükt, welche wenigſtens eine bejahte oder verneinte Wurzel, die gröſſer, als die Einheit iſt, haben muß. Man ſuche nun wiederum diejenige ganze Zal β, die dieſer Wurzel am nächſten kommt, und ſeze $y = \beta + \frac{1}{z}$, welches eine neue Gleichung in z ausgedrükt, geben wird, welche nothwendig eine Wurzel haben muß, die gröſſer als die Einheit iſt. Die ihr am nächſten kommende Zal heiſſe γ, u. ſ. w. Die geſuchte Wurzel wird alſo durch folgenden Bruch vorgeſtellt werden,

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

und dieſe Reihe muß irgendwo abbrechen, wenn die geſuchte Wurzel rational iſt, hingegen aber ins Unendliche fortgehen, wenn ſolche incommenſurabel iſt.

In den angeführten Abhandlungen wird man nun alle nöthige Sätze finden, ſowol dieſe Methode, als auch die Vortheile, die ſie gewährt, einzuſehen, nebſt verſchiedenen Mitteln, die Operationen öfters abzukürzen; ſo daß ich mir ſchmeichle, dieſe Materie beinahe gänzlich erſchöpft zu haben.

Was indeſſen die Wurzeln der Gleichungen vom zweiten Grade anbetrifft, ſo werden wir weiter unten (§. 33 und den folgenden) eine beſondere, ſehr einfache Methode vortragen, dieſelbe in fortlaufende Brüche zu verwandeln.

§. 10.

Nachdem wir die Entſtehung der fortlaufenden Brüche gezeigt haben, ſo wollen wir nun jezt auch ihre vorzüglichſten Eigenſchaften und ihren N. zen darthun.

Vorderſamſt iſt klar, daß man dem wahren Werth um deſto näher komme, je mehr Glieder in dem fortlaufenden Bruch genommen werden; ſo daß, wenn man nach und nach bei verſchiedenen Gliedern deſſelben abbricht, nothwendigerweiſe eine Reihe von

Gröſſen

Grösſen herauskommen muß, welche ſich der gegebenen Grösſe immer mehr und mehr nähern.

Da alſo der Werth von a durch den Bruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

vorgeſtellt wird, ſo werden die Grösſen

$$\alpha,\ \alpha + \frac{1}{\beta},\quad \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}\ \&c.$$

Oder:

$$\alpha,\ \frac{\alpha\beta + 1}{\beta},\ \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}$$

dem Werth von a immer näher und näher kommen.

Damit aber das Geſez, nach welchem dieſe Grösſen immer mehr und mehr convergiren, deſto deutlicher in die Augen falle, muß man ſich erinnern, daß nach den Formeln des 3. §.

$$a = \alpha + \frac{1}{b},\ b = \beta + \frac{1}{c},\ c = \gamma + \frac{1}{d}\ \&c.$$

ſey; woraus erhellet, daß α der erſte Werth iſt, der a am nächſten kommt, und wenn nachher der genaue Werth von a, welcher $= \frac{\alpha b + 1}{b}$ iſt, genommen, und ſtatt b ſein nächſter Werth β geſezt wird, ſo kommt man auf dieſen noch näheren Werth $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$

Einen dritten noch nähern Werth erhält man, wenn man erstens statt a seinen genauen Werth $\frac{\beta c + 1}{c}$ sezt, woraus $a = \frac{(\alpha\beta + 1)c + \alpha}{\beta c + 1}$ entsteht, und zweitens statt c seinen nächsten Werth γ sezt; auf diese Art wird ein neuer Werth von a

$= \frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1}$ seyn.

Wenn man aber diese Schlüsse noch weiter fortsezt, und in dem oben gefundenen Ausdruk von a statt c seinen genauen Werth $\frac{\gamma d + 1}{d}$ sezt, so ergibt sich

$$a = \frac{\left(\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1}\right) d + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1) d + \beta}$$

oder wenn man statt d seinen nächsten Werth δ nimt,

$$a = \frac{\left(\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1}\right) \delta + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}$$

welches also der Ausdruk für a von der vierten Näherung ist, u. s. w.

Hieraus erhellet nun aber deutlich, daß wenn aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. folgende Ausdrücke gemacht werden:

$A = \alpha$.	und	$A' = 1$	
$B = \beta A + 1$		$B' = \beta$	
$C = \gamma B + A$		$C' = \gamma B' + A'$	
$D = \delta C + B$		$D' = \delta C' + B'$	
$E = \varepsilon D + C$	&c.	$E' = \varepsilon D' + C'$	&c.

folgende Reihe von Brüchen erhalten wird, die sich der Grösse a immer mehr und mehr nähern

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'} \text{ &c.}$$

Wenn

Wenn die Gröſſe a rational iſt, und durch den Bruch $\frac{V}{V'}$ ausgedrükt wird, ſo erhellet deutlich, daß dieſer Bruch immer der lezte in der vorhergehenden Reihe ſeyn müſſe, weil in dieſem Fall der fortgehende Bruch geendigt iſt, und der leztere Bruch der obigen Reihe immer dem ganzen fortlaufenden Bruch gleich ſeyn muß.

Iſt aber die Gröſſe a irrational oder transcendentiſch, ſo geht der fortlaufende Bruch ins Unendliche fort, und demnach kann auch die Reihe der convergirenden Brüche ins Unendliche fortgeſezt werden.

§. 11.

Laßt uns nun die Natur dieſer Brüche unterſuchen. Vorderſamſt iſt klar, daß ſowol die Zalen A, B, C &c. als auch A′, B′, C′ &c. immer zunehmen. Denn 1) wenn die Gröſſen α, β, γ, &c. alle bejaht ſind, ſo müſſen auch A, B, C und A′ B′ C′ &c. nothwendig bejaht ſeyn, und es muß alſo $B > A$, $C > B$, $D > C$ &c. und $B' =$ oder $> A'$, $C' > B'$, $D' > C'$ werden. 2) Wenn α, β, γ &c. entweder alle oder zum Theil verneint ſind, dann gibt es unter den Zalen A, B, C, A′, B′, C′ &c. bejahte und verneinte; da aber nach den vorhergehenden Formeln allgemein

$$\frac{B}{A} = \beta + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \quad \frac{D}{C'} = \delta + \frac{B}{C}$$

&c. iſt, ſo folgt hieraus, daß, wenn die Zalen, α, β, γ &c. deren Zeichen übrigens ſeyn mögen, was ſie wollen, um eine Einheit verſchieden ſind, nothwendig auch, (wenn man von dieſen Zeichen abſtrahirt,) $\frac{B}{A}$

gröſſer als die Einheit, mithin $\frac{A}{B}$ kleiner als die Einheit, folglich $\frac{C}{B}$ gröſſer als dieſelbe, und ſofort ſeyn müſſe. Es iſt alſo B gröſſer als A, C gröſſer als B &c.

Hiebei iſt nur eine einzige Ausnahme zu bemerken, wenn nemlich unter den Gröſſen α, β, γ &c. einige der Einheit gleich ſind. Wir wollen nemlich annehmen, die Zal γ ſey die erſte, welche $= \pm 1$ iſt. Es wird alſo zuerſt $B > A$ ſeyn, aber B wird $\gtrless$ C ſeyn, wenn $\frac{A}{B}$ mit γ verſchiedene Zeichen hat, welches daraus erhellet, daß $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ iſt; denn in dieſem Falle wird $\gamma + \frac{A}{B}$ kleiner, als die Einheit. Aber dann behaupte ich, daß auch nothwendig D gröſſer als B ſeyn werde, welches folgender Geſtalt erwieſen werden kann: Da $\gamma = \pm 1$ ſo iſt auch §. 10. $c = \pm 1 + \frac{1}{d}$, und $c - \frac{1}{d} = \pm 1$; da aber c und d gröſſer als die Einheit ſind, (§. 3.) ſo kann dieſe Gleichung nicht beſtehen, wenn c und d nicht einerlei Zeichen haben. Nun ſind γ und δ die nächſten Werthe von c und d, mithin müſſen ſie auch einerlei Zeichen haben; aber der Bruch $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ muß mit γ einerlei Zeichen haben, weil γ eine ganze Zal iſt, und $\frac{A}{B}$ ein Bruch, der kleiner als die Einheit

iſt.

ist. Folglich haben $\frac{C}{B}$ und δ einerlei Zeichen, folglich ist $\frac{\delta C}{B}$ eine bejahte Zal. Aber $\frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}$, folglich muß, wenn man beiderseits mit $\frac{C}{B}$ multiplicirt, $\frac{D}{B} = \frac{\delta C}{B} + 1$ seyn. Da nun aber $\frac{\delta C}{B}$ bejaht ist, so muß also $\frac{D}{B}$ grösser als die Einheit, und daher D grösser als B seyn.

Hieraus folgt demnach, daß, wenn in der Reihe A, B, C ein Glied vorkommt, das kleiner, als das vorhergehende ist, das darauf folgende Glied nothwendigerweise grösser seyn müsse, so, daß wenn man also diese kleineren Glieder abrechnet, die Reihe nichts desto weniger steigt. Dieser Umstand kann aber, wenn man will, immer vermieden werden, entweder wenn man die Grössen α, β, γ &c. alle bejaht nimmt, oder wenn man die Einheiten alle den Zeichen nach verschieden nimmt, welches immer möglich ist.

Ebenderselbe Saz gilt auch für die Reihe A′, B′, C′ ꝛc., in welcher

$$\frac{B'}{A'} = \beta, \quad \frac{C'}{B'} = \gamma + \frac{A'}{B'}, \quad \frac{D'}{C'} = \delta + \frac{B'}{C'}.$$

wobei also ähnlich Schlüsse, wie bei dem Vorhergehenden, statt finden.

Wenn man die Glieder zweier benachbarten Brüche der Reihe $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ ins Kreuz multiplicirt, so

ſo findet ſich $BA' - AB' = 1$, $CB' - BC' = AB' - BA'$, $DC' - CD' = BC' - CB'$ &c.; woraus allgemein folgt

$$BA' - AB' = 1.$$
$$CB' - BC' = -1.$$
$$DC' - CD' = 1.$$
$$ED' - DE' = -1. \text{ \&c. *)}$$

Dieſe Eigenſchaft iſt vorzüglich zu bemerken, weil ſehr nüzliche Folgen daraus gezogen werden können.

Erſtens erhellet daraus, daß die Brüche $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ &c. ſchon bereits auf ihre kleinſte Zal gebracht ſind; denn, wenn z. B. C und C' auſſer der Einheit noch einen andern gemeinſchaftlichen Theiler hätten, ſo wäre auch die ganze Zal $CB' - BC'$ durch denſelben theilbar, welches aber unmöglich iſt, weil $CB' - BC' = -1$.

Wenn die obigen Gleichungen unter dieſer Geſtalt vorgeſtellt werden:

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}$$
$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{C'B'}$$
$$\frac{D}{D'}$$

*) $B = \beta A + 1$, und $A' = 1$; alſo $BA' = \beta A + 1$. ferner $AB' = A\beta$; folglich $BA' - AB' = 1$. Eben ſo iſt auch $CB' = (\gamma B + A) B' = \gamma BB' + AB'$. und $BC' = B(\gamma B' + A') = \gamma BB' + BA'$. Alſo $CB' - BC' = \gamma BB' + AB' - \gamma BB' - BA' = AB' - BA' = -1$. und ſo mit den übrigen.

$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = \frac{1}{D'E'} \text{ &c.}$$

so ist leicht einzusehen, daß die Unterschiede zwischen den nächsten Brüchen der Reihe $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ &c. immer geringer werden, und folglich die Reihe nothwendig convergent seyn müsse. Ich behaupte aber, der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden Brüchen sey so gering, als möglich, so daß sich zwischen diesen beiden Brüchen kein andrer findet, dessen Nenner nicht grösser wäre, als die Nenner jener Brüche.

Man nehme z. B. die zwei Brüche $\frac{C}{C'}$ und $\frac{D}{D'}$, deren Unterschied $\frac{1}{C'D'}$ ist, und setze, es gebe einen andern Bruch $\frac{m}{n}$, dessen Werth zwischen jene zwei Brüche falle, und bei welchem der Nenner n kleiner sey als C' oder D'. Weil nun also $\frac{m}{n}$ zwischen $\frac{C}{C'}$ und $\frac{D}{D'}$ fallen soll, so muß der Unterschied von $\frac{m}{n}$ und $\frac{C}{C'}$, welcher $= \frac{mC' - nC}{nC'}$ oder $= \frac{nC - mC'}{nC'}$ ist, kleiner als $\frac{1}{C'D'}$ seyn. Es ist aber klar, daß eben dieser Unterschied nicht kleiner seyn kann, als $\frac{1}{nC'}$;

wenn also $n < D'$, so wird derselbe nothwendig grösser als $\frac{1}{C'D}$ werden. Und da auf gleiche Art der Unterschied zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{D}{D'}$ nicht kleiner seyn kann, als $\frac{1}{nD'}$, so wird er nothwendig grösser seyn, als $\frac{1}{C'D'}$, wenn $n < C$ ist.

§. 13.

Laßt uns nun sehen, wie jeder einzelne Bruch der Reihe $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$ &c. dem Werth von a sich nähere. Zu diesem Endzwek betrachte man die §. 10. gefundenen Formeln, nach welchen

$$a = \frac{Ab + 1}{A'b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B'c + A'}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C'd + B'}$$

$$a = \frac{De + C}{D'e + C'}$$ und so weiter.

Wenn man also wissen will, wie z. B. der Bruch $\frac{C}{C'}$ sich der Grösse a nähere, so suche man den Unterschied zwischen $\frac{C}{C'}$ und a, indem man statt a die Grösse

$\frac{Cd+B}{C'd+B'}$ ſezt. Dieſer Unterſchied iſt nun

$$a - \frac{C}{C} = \frac{C'd+B'}{C'd+B'} - \frac{C}{C'} = \frac{BC' - CB'}{C'(C'd+B')}$$

oder $= \frac{1}{C'(C'd+B')}$, weil $BC' - CB' = 1$ iſt.

Da aber angenommen wird, δ ſey der nächſte Werth an d, ſo daß der Unterſchied zwiſchen d und δ kleiner als die Einheit iſt, (§. 3.) ſo muß der Werth von d zwiſchen den Zalen δ und $\delta \pm 1$ enthalten ſeyn, (wo das obere Zeichen für den Fall gilt, da der nächſte Werth δ kleiner, als der wahre Werth d iſt, und das untere für denjenigen, da $\delta > d$ iſt.) Folglich iſt auch der Werth von $C'd+B'$ zwiſchen $C'\delta+B'$ und $C'(\delta \pm 1) + B'$, das heißt, zwiſchen D' und $D' \pm C'$ enthalten. Mithin fällt $a - \frac{C}{C'}$ zwiſchen die zwei Gränzen $\frac{1}{C'D'}$ und $\frac{1}{C'(D' \pm C')}$; woraus man alſo die Gröſſe der Näherung des Bruchs $\frac{C}{C'}$ beurtheilen kann.

§. 14.

Allgemein wird alſo ſeyn

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b}$$

$$a = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c+A')}$$

$$a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd+B)}$$

$$a = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e+C)}$$

und so weiter. *)

Wenn wir aber annehmen, daß die nächsten Werthe α, β, γ &c. immer kleiner genommen werden, als die wahren, so werden diese Zalen alle bejaht seyn, so daß die Grössen b, c, d &c. (§. 3.) und also auch A′, B′, C′ &c. ebenfalls alle bejaht sind. Hieraus folgt nun, daß die Unterschiede zwischen a und den Brüchen $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ &c. abwechslungsweise bejaht und verneint seyn müssen, das ist: daß diese Brüche abwechslungsweise kleiner und gröser, als a seyen. Da überdis $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$ &c. (wie angenommen worden,) so ist auch $b > B'$, $B'c + A' > B'\gamma + A' > C'$; $C'd + B' > C'\delta + B' > D'$ &c., und da $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, so muß auch $b < B' + 1$; $B'c + A' < B'(\gamma + \alpha) + A' < C' + B'$ seyn, u. s. w., so daß die Fehler, welche man begeht, wenn man die Brüche $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ &c. statt a sezt,

*) Diß folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden, nach welchem nemlich $a - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'(C'd+B)}$ und mithin $a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd+B')}$ ist. Aber eben die Schlüsse, die bei $\frac{C}{C'}$ gebraucht wurden, sind diesem Bruche nicht allein eigen, sondern hätten auch auf jeden andern der obigen Reihen auf eben dieselbe Art angewandt werden können. Folglich ꝛc. Anm. d. Ueb.

a ſezt, kleiner ſeyn werden, als $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$ &c. aber gröſſer, als $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$, $\frac{1}{C'(D'+C')}$ &c. woraus zu erſehen iſt, wie klein dieſe Fehler werden, und wie ſehr ſie immer mehr und mehr abnehmen.

Weil aber die Brüche $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ &c. abwechslungsweiſe kleiner und gröſſer ſind als a, ſo iſt klar, daß der Werth dieſer Gröſſe immer zwiſchen je zwei unmittelbar auf einander folgenden Brüchen liegen müſſe. Da wir nun oben (§. 12.) bewieſen haben, daß zwiſchen zwei dergleichen Brüchen kein anderer Bruch möglich ſey, der einen kleinern Nenner hat, als einer von dieſen zwei Brüchen, ſo folgt hieraus, daß die einzelnen Brüche von denen hier die Rede iſt, die Gröſſe a genauer ausdrücken, als jeder andre Bruch, deſſen Nenner kleiner wäre, als der Nenner des nächſtfolgenden Bruchs. Nemlich der Bruch $\frac{C}{C'}$ zum Beiſpiel, wird den Werth von a genauer ausdrücken, als jeder andre Bruch $\frac{m}{n}$, in welchem n kleiner als D' iſt.

§. 15.

Sind aber die nächſten Werthe α, β, γ &c. alle, oder zum Theil gröſſer, als die wahren, alsdann werden unter dieſen Zalen nothwendig einige verneint ſeyn müſſen. (§. 3.) Folglich werden auch einige

Glieder

Glieder der Reihe A, B, C &c. und A′, B′, C′ &c. verneint werden, und daher sind die Unterschiede der Brüche $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ und der Grösse a nicht mehr abwechslungsweise bejaht und verneint, wie im vorhergehenden §; daher geben auch diese Brüche nicht immer die Gränzen von a in plus und minus an. Aus diesem Grunde werden also in der Ausübung diejenigen fortlaufenden Brüche vorgezogen, deren Nenner alle bejaht sind. In Zukunft werden wir daher keine andre als solche von dieser leztern Art mehr betrachten.

§. 15.

Es seyen nun also die Brüche $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ &c. so, daß sie abwechselnd kleiner und grösser sind als a; so läßt sich diese Reihe in zwei andre vertheilen

$\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}$ &c. und $\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}$ &c.

deren erstere alle diejenigen Brüche enthält, die kleiner sind als a, und sich der Grösse a wachsend nähern; die andre aber alle diejenigen, die grösser sind, als a, und sich dem Werthe a durch immerwährendes Abnehmen nähern. Jede dieser beiden Reihen wollen wir jezt untersuchen.

In der ersten ist (§. 10. und 12.)

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{\gamma}{A'C'} \text{ und } \frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{\varepsilon}{C'E'}, \text{ &c.}$$

und in der zweiten

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{\delta}{B'D'}, \frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{\xi}{D'F'} \text{ &c.}$$

Wären

Wären nun die Zalen γ, δ, ε &c. alle der Einheit gleich, so könnte man wie §. 12. beweisen, daß zwischen zwei auf einander folgenden Brüchen der einen oder der andern Reihe kein andrer Bruch gefunden werden könne, dessen Nenner kleiner ist, als die Nenner jener beiden Brüche. Sind aber die Grössen α, β, γ &c. nicht $= 1$, so wird diß nicht statt finden; denn in diesem Fall kann man zwischen die Brüche, von denen die Rede ist, so viel andre einschieben, als Einheiten in den Zalen $\gamma - 1$, $\delta - 1$, $\varepsilon - 1$ ꝛc. enthalten sind, und daher darf man nur nach und nach in den Werthen C und C′ (§. 10.) die Zalen 1, 2, 3 ꝛc. γ anstatt γ, und so in den Werthen D und D′ die Zalen 1, 2, 3 ꝛc. δ anstatt δ setzen, u. s. w.

§. 17.

Wir wollen z. B. annehmen, γ sey $= 4$, so ist also $C = 4B + A$, und $C' = 4B' + A'$; es können also zwischen $\frac{A}{A'}$ und $\frac{C}{C'}$ folgende drei Brüche eingeschoben werden $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, $\frac{3B+A}{3B'+A'}$. Man sieht aber deutlich, daß die Nenner dieser Brüche eine steigende arithmetische Progression von A′ bis C′ bilden, und wir werden sogleich sehen, daß eben diese Brüche auch von $\frac{A}{A'}$ bis auf $\frac{C}{C'}$ zu nehmen, so, daß es unmöglich ist, in der Reihe

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}, \frac{4B+A}{4B'+A'}$$

oder $\frac{C}{C'}$ irgend einen Bruch einzuschieben, dessen Werth

zwischen

zwischen diese zwei auf einander folgende Brüche falle, und dessen Nenner ebenfalls zwischen diesen zwei Brüchen enthalten sey. Denn, wenn zwischen den vorhergehenden Brüchen die Unterschiede genommen werden, so ist, wegen

$$B A' - A' B = 1,$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A').C'}$$

wo man erstens sieht, daß die Brüche $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$ &c. zunehmen, weil alle ihre Unterschiede bejaht sind. Und da ferner diese Unterschiede gleich der Einheit, dividirt durch das Produkt zweier Nenner, sind, so kann der §. 12. gebrauchte Schluß auch hier angewandt, und mithin auf eine ähnliche Art bewiesen werden, daß es unmöglich sey, zwischen zwei auf einander folgende Brüche der vorhergehenden Reihe irgend einen Bruch $\frac{m}{n}$ einzuschieben, dessen Nenner n zwischen die Nenner jener zwei Brüche fällt, oder überhaupt kleiner ist, als der größte dieser beiden Nenner.

Ferner,

Ferner, da die Brüche, von welchen wir hier reden, alle gröſſer ſind, als der wahre Werth a, $\frac{B}{B'}$ hingegen aber kleiner iſt, ſo iſt klar, daß jeder dieſer Brüche ſich der Gröſſe a nähere, ſo daß ihr Unterſchied kleiner ſeyn wird, als der Unterſchied eben deſſelben Bruchs, und des Bruchs $\frac{B}{B'}$, Nun findet man

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{A'\,B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(B'+A')\,B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(2B'+A')\,B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(3B'+A')\,B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{C'\,B'}$$

Da aber dieſe Unterſchiede gleich der Einheit, dividirt durch das Produkt der Nenner, ſind, ſo kann man die Schlüſſe des 12. §. auch hier anwenden, um zu beweiſen, daß kein Bruch $\frac{m}{n}$ zwiſchen die Brüche $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$ &c. und $\frac{B}{B'}$ fallen könne, deſſen Nenner n kleiner iſt, als der Nenner eines dieſer Brüche; woraus alſo folgt, daß jeder einzelne derſelben ſich der Gröſſe a mehr nähere, als jeder andere

Bruch, der kleiner als a wäre, und dabei einen kleineren, d. i. in einfacheren Zalen ausgedrükten Nenner hätte.

§. 18.

Im vorhergehenden § haben wir die eingeschalteten Brüche zwischen $\frac{A}{A'}$ und $\frac{C}{C'}$ betrachtet. Ein gleiches wird nun von den eingeschalteten Brüchen zwischen $\frac{C}{C'}$ und $\frac{E}{E'}$, zwischen $\frac{E}{E'}$ und $\frac{G}{G'}$ &c. statt finden, wenn ε, $\varkappa$ &c. grösser als die Einheit sind.

Alles, was wir bisher von der ersten Reihe $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ gesagt haben, kann man auch auf die andre $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$ ꝛc. anwenden; so, daß wenn δ, ξ ꝛc. grösser als die Einheit sind, zwischen die Brüche $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$ ꝛc. verschiedne andre eingeschoben werden können, die alle grösser, als a sind, aber immer mehr und mehr abnehmen, und die Grösse a genauer ausdrücken, als jeder andere grössere Bruch, als a, thun könnte, der in einfacheren Zalen gegeben wäre.

Ueberdiß, wenn β ebenfalls grösser als die Einheit ist, so können auf ebendieselbe Art vor den Bruch $\frac{B}{B'}$ die Brüche $\frac{A+1}{1}$ oder $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$ ꝛc. bis auf $\frac{\beta A+1}{\beta}$ oder $\frac{B}{B'}$ gesezt werden, und diese Brü-

Brüche werden ebendieſelben Eigenſchaften haben, als die andern eingeſchalteten Brüche. Auf dieſe Art ergeben ſich alſo folgende zwei vollſtändige Reihen von Brüchen, die ſich der Gröſſe a nähern.

Wachſende Brüche, die kleiner ſind, als a.

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\gamma B+A}{\gamma B'+A'}, \frac{C}{C'}, \frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\varepsilon D+C}{\varepsilon D'+C'}, \frac{E}{E'}, \frac{F+E}{F'+E'}, \text{ ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Abnehmende Brüche, die gröſſer ſind als a

$$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\beta A+1}{\beta}, \frac{B}{B'}, \frac{C+B}{C'+B'}, \frac{2C+B}{2C'+B'} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\delta C+B}{\delta C'+B'}, \frac{D}{D'}, \frac{E+D}{E'+D'} \text{ ꝛc.}$$

Wenn die Gröſſe a irrational, oder transcendentiſch iſt, ſo werden die beiden vorhergehenden Reihen ins Unendliche fortgehen, weil die Reihen der Brüche $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ ꝛc. welche wir in Zukunft Hauptbrüche heiſſen wollen, um ſie von den eingeſchalteten zu unterſcheiden, auch ſelbſt ins Unendliche fortgehen. (§. 10.)

Wenn aber die Gröſſe a rational, und gleich irgend einem Bruche $\frac{V}{V'}$ iſt, ſo haben wir am angeführ-

ten Orte gezeigt, daß die Reihe, von der die Rede ist, abbreche, und der lezte Bruch dieser Reihe wird eben dieser Bruch $\frac{V}{V'}$ seyn. Also wird dieser Bruch auch eine von den beiden obigen Reihen endigen, die andre Reihe aber kann immer ins Unendliche fortgesezt werden.

In der That, wenn wir annehmen, daß δ der lezte Nenner des fortlaufenden Bruchs sey, so wird $\frac{D}{D'}$ der lezte unter den Hauptbrüchen seyn, und die Reihe der grössern Brüche als $\frac{a}{}$ wird sich mit eben diesem Bruch $\frac{D}{D'}$ endigen. Aber die andre Reihe derjenigen Brüche, die kleiner sind, als $\frac{a}{}$, wird zwar eigentlich nicht über $\frac{C}{C'}$ hinaus fortgehen, welcher Bruch dem $\frac{D}{D'}$ vorangeht; um sich aber zu überzeugen, daß sie doch fortgesezt werden könne, darf man nur den Nenner ε betrachten, welcher auf den lezten Nenner δ folgen sollte, und $= \backsim$ seyn muß, (§ 3.), so daß der Bruch $\frac{E}{E'}$ welcher auf $\frac{D}{D'}$ in der Reihe der Hauptbrüche folgt, $\frac{\backsim D + C}{\backsim D' + C'} = \frac{D}{D'}$ wäre. Aber nach dem Gesez der eingeschalteten Brüche, können, da $\varepsilon = \backsim$ ist, zwischen $\frac{C}{C'}$ und $\frac{E}{E'}$ unendlich viele dergleichen Brüche eingeschoben werden, welche $\frac{D+C}{D'+C'}$

$\frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'}, \frac{\omega D+C}{\omega D'+C'}$ sind.

Also kann man in dieſem Falle neben den Bruch $\frac{C}{C'}$ in der erſten Reihe der Brüche auch die eingeſchalteten ſtellen, von denen wir hier reden, und ſie ins Unendliche fortſetzen.

Problem.

§. 19.

Wenn ein in vielen Ziffern ausgedrükter Bruch gegeben iſt, alle diejenigen Brüche in kleineren Zalen zu finden, die der Wahrheit ſo nahe kommen, daß es unmöglich iſt, derſelben noch näher zu kommen, ohne ſich mehrerer Ziffern zu bedienen.

Dieſes Problem kann durch die bisher erklärte Theorie leicht aufgelößt werden.

Man verwandle den gegebenen Bruch nach § 4. in einen fortlaufenden, indem man immer die nächſt kleineren Werthe, als die wahren nimmt, damit die Zalen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ꝛc. alle bejaht werden. Aus den gefundenen Gröſſen formire man ſofort nach §. 10. die Brüche $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ ꝛc. deren lezterer nothwendig dem vorgegebenen Bruche gleich ſeyn muß, weil der fortlaufende Bruch in dieſem Falle abbricht. Dieſe Brüche werden abwechslungsweiſe kleiner und gröſſer ſeyn, als der gegebene, und nach und nach in immer gröſſeren Zalen ausgedrükt werden. Ueberdiß ſind ſie zugleich auch ſo beſchaffen, daß jeder einzelne derſelben dem gegebenen immer näher kommt, als jeder andere Bruch der in weniger einfa-

chen Zalen ausgedrükt wäre. Auf dieſe Art erhält man alſo alle diejenigen Brüche, die in kleineren Zalen, als der gegebene iſt, der Frage Genüge leiſten.

Wenn man aber alle, ſowol gröſſere als kleinere, Brüche haben will, ſo berechne man zwiſchen den vorhergehenden Brüchen ſo viele eingeſchalteten, als möglich iſt, und bilde auf dieſe Art zwei Reihen von convergirenden Brüchen, wovon einige gröſſer, die andre alle kleiner, als der gegebene Bruch ſind, (§. 16. 17. 18.); ſo wird jede dieſer Reihen eben die Eigenſchaften haben, als die Reihen der Hauptbrüche, $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ ꝛc. denn die Brüche in jeder einzelnen Reihe werden nach und nach in gröſſern Ziffern ausgedrükt ſeyn, und ein jeder derſelben ſich dem gegebenen immer mehr nähern; es kann alſo nicht geſchehen, daß irgend ein andrer Bruch gröſſer, oder kleiner, als der gegebene, und zugleich auch in einfachern Zalen ausgedrükt ſey.

Es kann geſchehen, daß etwa einer der eingeſchalteten Brüche einer ſolchen Reihe dem gegebenen Bruch nicht ſo nahe komme, als einer der andern Reihe; obſchon lezterer in einfachern Zalen ausgedrükt iſt, als jener. Aus dieſem Grunde iſt es gut, die eingeſchalteten Brüche nur dann zu gebrauchen, wenn man die Abſicht hat, daß die geſuchten Brüche entweder alle kleiner, oder alle gröſſer als der gegebene ſeyn ſollen.

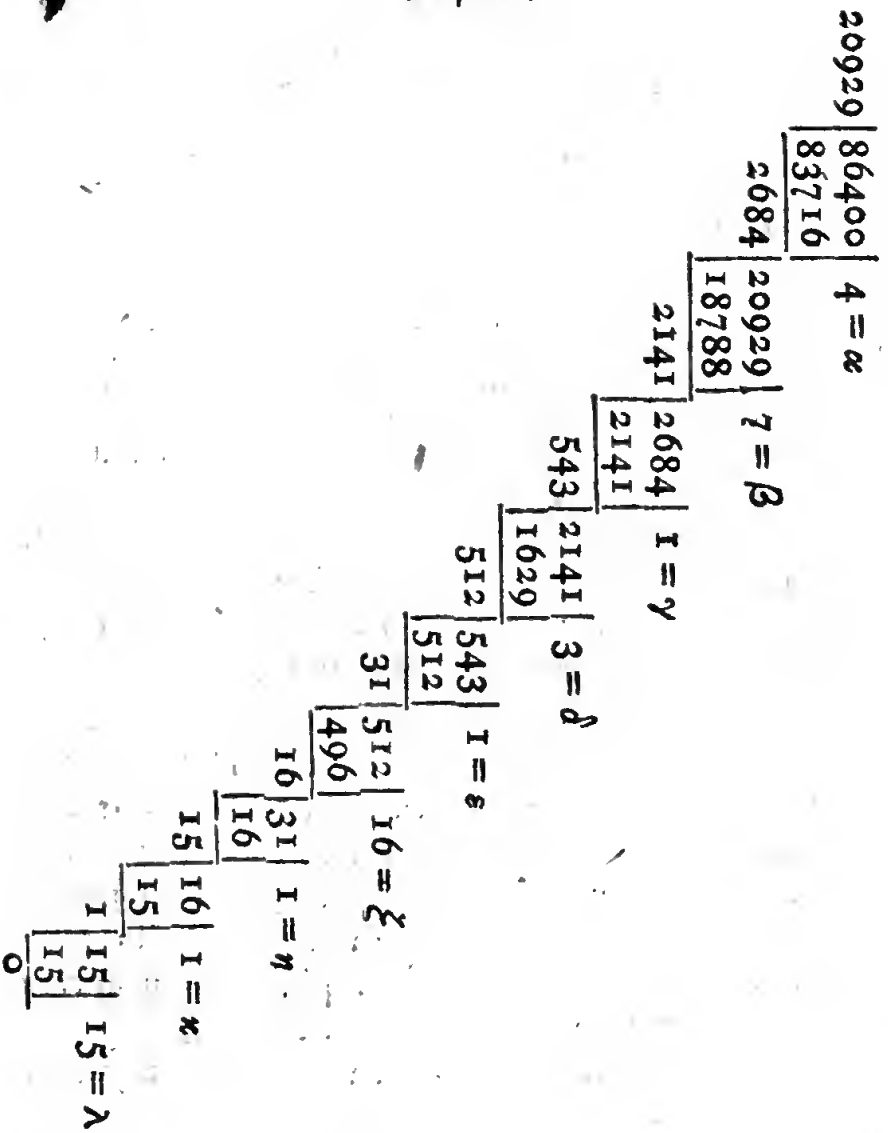
1. Beispiel.

§. 20.

Nach la Caille ist das Sonnenjahr $365^{T.}\ 5^{St.}\ 48'\ 49''$, folglich also um $5^{St.}\ 58'\ 49''$ länger als das gemeine Jahr von $365^{T.}$ Wäre dieser Unterschied genau von 6 Stunden, so gäbe diß einen Tag auf vier gemeine Jahre; wenn man aber zu wissen verlangt, in wie viel gemeinen Jahren dieser Unterschied eine gewisse Anzal von Tagen geben könne, so muß das Verhältniß zwischen $24^{St.}$ und $5^{St.}\ 48'\ 49''$ untersucht werden, welches $= \frac{86400}{20929}$ ist; so daß man sagen kann, daß, nach Verfluß von 86400 gemeiner Jahre, man 20929 Tage einschalten müsse, um dieselbe auf tropische Jahre zu bringen *).

Da aber das Verhältniß zwischen 86400 und 20929 in allzugrossen Zalen ausgedrükt ist, so entsteht die Frage, andre Verhältnisse, die diesem so nahe als möglich kommen, in kleineren Zalen zu finden. Man verwandle daher den Bruch $\frac{86400}{20929}$ in einen fortlaufenden Bruch, (nach §. 4.) indem man eben dieselbe Operation vornimmt, als ob der gröβte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden sollte; so wird man finden

*) Da nemlich auf jedes gemeine Jahr ein Ueberschuß von $5^{St.}\ 48^{M.}\ 49^{S.}$ herauskommt, so ist
1 Jahr : x Jahren $= 5^{St.}\ 48^{M.}\ 49^{S.} : 24^{St.}$
$=$ oder 20929 : 86400.
also $x = \frac{86400}{20929}$. oder in so viel Jahren beträgt der Ueberschuß einen Tag; also in $\frac{86400}{20929}$. 20929 Jahren beträgt er 20929. 1. Tag; d. i. in 86400 Jahren beträgt derselbe 20929 Tage.



Nachdem man nun die Quotienten α, β, γ ꝛc. gefunden, so läßt sich die Reihe $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ &c. leicht folgender massen daraus herleiten.

4,	7,	1,	3,	1,	16,	1,	1,	15,
4	29	33	128	161	2704	2865	5669	86400
1	7	8	31	39	655	694	1349	20929

woraus

woraus erhellet, daß der lezte Bruch mit dem vorgegebenen einerlei ist.

Damit aber diese Brüche desto leichter erhalten werden, schreibe man, wie ichs zu thun pflege, erstlich die Reihe der Quotienten, α, β, γ ꝛc. und unter diese die gehörigen Brüche $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$ ꝛc. Der erste Bruch wird immer diejenige Zal zum Zäler haben, die darüber steht, und zum Nenner die Einheit *)

*) Gewöhnlich entwickelt man diese Brüche also:

1) Man macht drei Colonnen, und sezt in die erste die gefundenen Quotienten 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15, der Ordnung nach unter einander, nemlich den zuerst gefundenen oben an, unter diesen den zweiten u. s. w.

	1	0
4	0	1
7	1	4
1	7	29
3	8	33
1	31	128
16	39	161
1	655	2704
1	694	2865
15	1349	5669
	20929	86400

2) In der zweiten Colonne sezt man neben den ersten Quotienten jederzeit eine 0, und darüber die Einheit. Um nun die übrigen Zalen dieser Colonne zu finden, sage man:

4 mal 0 ist 0, und hierzu 1 addirt, ist 1. Diese Zal setze man unter die 0, gerade über von dem Quotienten 7:

Ferner 7 mal 1 ist 7, welche Zal unter 1, und neben den dritten Quotienten 1 zu stehen kommt. Nun sage man wieder 1 mal 7 ist 7 und 1 dazu ist 8; diß gibt die siebente Zal der zweiten

Der zweite wird zum Zäler, das Produkt des darüber ſtehenden Quotienten in den Zäler des erſten Bruchs, + 1 haben, und zum Nenner den Quotienten, der darüber ſteht.

Der zweiten Colonne, neben dem Quotienten 3. Hieraus findet ſich die fünfte, indem man, wie bisher, dieſen Quotienten 3 mit der daneben ſtehenden Zal 8 multiplicirt, und zum Product die über 8 ſtehende 7 addirt, nemlich 3. 8 + 7 = 31. Eben ſo iſt

1. 31 + 8 = 39
16. 39 + 31 = 655
1. 655 + 39 = 694
1. 694 + 655 = 1349, und endlich
15. 1349 + 694 = 20929.

3) Die dritte Colonne wird vermittelſt eben der Quotienten der erſten Colonne, auf eine ganz ähnliche Art entwickelt, wie die zweite: nur mit dem Unterſchiede, daß in derſelben neben den erſten Quotienten 4, die Zal 1, und über dieſe die 0 geſezt wird. Sodann mache man

4. 1 + 0 = 4 und ſetze dieſe Zal neben den Quotienten 7.
7. 4 + 1 = 29
1. 29 + 4 = 33
3. 33 + 29 = 128
1. 128 + 33 = 161
16. 161 + 128 = 2704
1. 2704 + 161 = 2865
1. 2865 + 2704 = 5669 und endlich
15. 5669 + 2865 = 86400

Anm. d. Ueb.

Der dritte Bruch wird zum Zäler, das Produkt aus dem darüber ſtehenden Quotienten in den Zäler des zweiten Bruchs haben plus den Zäler des erſten: und zum Nenner das Produkt aus eben dem darüber ſtehenden Quotienten in den Nenner des zweiten, plus den Nenner des erſten Bruchs.

Ueberhaupt wird der Zäler eines jeden Bruchs ſeyn: Ein Produkt aus dem darüber ſtehenden Quotienten in den Zäler des vorhergehenden Bruchs, plus dem Zäler des zweiten vorhergehenden; und der Nenner ein Produkt aus eben demſelben darüberſtehenden Quotienten in den vorhergehenden Nenner, plus den zweiten vorhergehenden Nenner.

So iſt z. B.
$$\begin{aligned} 29 &= 7.\ 4 + 1 \\ 7 &= 7. \\ 33 &= 1.\ 29 + 4 \\ 8 &= 1.\ 7 + 1 \\ 128 &= 3.\ 33 + 29 \\ 31 &= 3.\ 8 + 7 \text{ ꝛc. ꝛc.} \end{aligned}$$
welches mit den Formeln (§. 10.) übereinkommt.

Man ſiehet hier aus den Brüchen $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}$ ꝛc. daß die einfachſte Einſchaltung diejenige von einem Tag in vier Jahren iſt, worauf ſich der Julianiſche Kalender gründet. Man würde aber der Wahrheit näher kommen, wenn man in einem Zeitraum von 29 Jahren 7 Tage, oder in 33 Jahren 8 Tage einſchaltete, u. ſ. w. Man ſieht überdiß, daß, da die Brüche $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}$ abwechslungsweiſe kleiner und gröſſer ſind, als der Bruch $\frac{86400}{20929}$, oder als $\frac{24^{St.}}{5^{St.}\ 48'\ 49''}$

die

die Einschaltung eines Tags in vier Jahren allzugroß, diejenige von 7 Tagen in 29 Jahren zu klein, die von 8 Tagen in 33 Jahren wiederum zu groß sey, u. s. w.: Aber jede dieser Einschaltungen wird für ebendenselben Zeitraum immer die genaueste seyn.

Wenn nun aber die kleineren Brüche sowol als die grössern in zwei besondre Reihen gesezt werden, so lassen sich auch noch verschiedene eingeschaltete Brüche dazwischen stellen, um die Reihen vollständiger zu machen. Und aus diesem Grunde soll hier eben das Verfahren wie oben gebraucht werden, aber so, daß statt einer jeden Zal der obern Reihe, nach und nach alle ganze Zalen, die kleiner, als diese Zal sind, (wenn es welche gibt), genommen werden.

Wenn wir also zuerst die zunehmenden Brüche betrachten,

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{39}, \frac{1}{694}, \frac{15}{20929}$$

so siehet man, daß da die Einheit über dem ersten, zweiten, dritten und vierten Bruche stehet, zwischen keinem derselben ein eingeschalteter Bruch sich befinde; da aber über dem leztern die Zal 15 steht, so wird man zwischen diesen und den vorhergehenden vierzehn Brüche einschalten können, deren Zäler diese arithmetische Progression bilden: $2865 + 5569$, $2865 + 2.5569$, $2865 + 3.5569$ ꝛc. und die Nenner folgende: $694 + 1349$, $694 + 2.1349$, $694 + 3.1349$ ꝛc.

Auf diese Art wird also die vollständige Reihe der zunehmenden Brüche:

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{8434}{2043}, \frac{14003}{3392}, \frac{19572}{4741}$$

$\frac{25141}{6090}, \frac{30710}{7439}, \frac{36279}{8788}, \frac{41848}{10137}, \frac{47417}{11486}$

$\frac{52986}{12835}, \frac{58555}{14184}, \frac{64124}{15533}, \frac{69693}{16882}, \frac{75262}{18231}$

$\frac{80831}{19580}, \frac{86400}{20929}$

Und da der lezte Bruch dem gegebenen gleich ist, so kann diese Reihe nicht weiter fortgesezt werden.

Es erhellet also hieraus, daß unter denen Brüchen, die zu viel geben, diejenigen, bei welchen auf 4 Jahre 1 Tag, oder auf 33 Jahre 8 Tage, oder auf 161 Jahre 59 Tage eingeschaltet werden, die einfachsten sind.

Laßt uns nunmehr auch die abnehmenden Brüche betrachten.

$$\frac{7}{29}, \frac{3}{128}, \frac{16}{2904}, \frac{1}{5569}$$
$$\frac{7}{31}, \frac{655}{1349}$$

und da 7 über dem ersteren Bruche steht, so können 6 andre vor diesen gesezt werden, deren Zäler folgende arithmetische Progression bilden, $4+1$, $2.4+1$, $3.4+1$ ꝛc. und die Nenner diese 1, 2, 3 ꝛc. Eben so können zwischen den ersten und zweiten Bruch 2 andre, und zwischen den zweiten und dritten 15, zwischen diesen und den lezten aber keiner eingeschaltet werden.

Und da endlich die vorhergehende Reihe nicht mit dem gegebenen Bruch aufhört, so kann dieselbe nach Belieben fortgesezt werden, (§. 18.)

Folglich

Folglich findet sich folgende Reihe nachstehender Brüche:

$$\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{62}{15}, \frac{95}{23}, \frac{128}{31}$$

$$\frac{289}{70}, \frac{450}{109}, \frac{611}{148}, \frac{772}{187}, \frac{933}{226}, \frac{1094}{265}, \frac{1255}{304}, \frac{1416}{343}$$

$$\frac{1577}{382}, \frac{1738}{421}, \frac{1899}{460}, \frac{2060}{499}, \frac{2221}{538}, \frac{2382}{577}, \frac{2543}{616}$$

$$\frac{2704}{655}, \frac{5569}{1349}, \frac{91969}{22278}, \frac{178369}{43207}, \frac{264769}{64136}, \frac{351169}{85065}$$

$$\frac{437569}{105994}$$ ꝛc. ꝛc.

welche alle kleiner sind, als der vorgegebene Bruch, und sich demselben mehr nähern, als alle andre Brüche die in weniger einfachen Zalen ausgedrükt wären.

Hieraus läßt sich schliessen, daß unter allen Einschaltungen, bei welchen zu wenig herauskommt, diejenigen die einfachsten sind, wo 1 Tag auf 5 Jahre, oder 2 Tag auf 9 Jahre, oder 3 Tage auf 13 Jahr eingeschoben werden ꝛc.

In dem Gregorianischen Kalender werden nur 97 Tage in 400 Jahren eingeschaltet; aus der vorhergehenden Tabelle erhellet aber, daß man der Wahrheit noch näher käme, wenn man 109 Tage in 450 Jahren einschaltete.

Es ist übrigens noch zu bemerken, daß man bei der Gregorianischen Verbesserung die von Copernicus bestimmte Jahrslänge von $365^{T.}\ 5^{St.}\ 49'\ 20''$ zum

Grund

Grund legte. Gebraucht man alſo dieſe Zal, ſtatt $365^{T.}\ 5^{St.}\ 48'\ 49''$, ſo findet ſich der Bruch $\frac{86400}{20960}$ oder $\frac{540}{131}$; woraus nach der vorhergehenden Methode die Quotienten 4, 8, 5, 3 entſpringen, aus denen ſodann folgende Hauptbrüche entſtehen:

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{169}{41}, \frac{540}{131}$$

welche, die zwei erſten ausgenommen, weit von denen unterſchieden ſind, die wir oben gefunden haben. Demungeachtet wird aber doch der Bruch $\frac{400}{97}$, der im Gregorianiſchen Kalender angenommen worden, nicht unter denſelben gefunden. Dieſer Bruch kann aber auch nicht unter denen ſeyn, welche in den beiden Reihen $\frac{4}{1}, \frac{169}{41}$, und $\frac{33}{8}, \frac{540}{131}$ eingeſchaltet werden können, weil er nur zwiſchen $\frac{33}{8}$ und $\frac{540}{131}$ fallen könnte Nun können zwiſchen dieſen, nach der über $\frac{540}{131}$ ſtehenden Zal 3 nur 2 Brüche eingeſchaltet werden, welche $\frac{202}{49}$ und $\frac{371}{90}$ ſind. Man ſieht alſo hieraus, daß man der Wahrheit viel näher gekommen wäre, wenn man bei der Gregorianiſchen Verbeſſerung nur 90 Tage in einem Zeitraum von 371 Jahren eingeſchaltet hätte.

Wenn der Bruch $\frac{400}{97}$ in einen andern verwandelt wird, deſſen Zäler $= 86400$, ſo wird derſelbe $= \frac{86400}{20952}$, welches vorausſezte, daß ein tropiſches Jahr $365^{T.}\ 5^{St.}\ 49'\ 12''$ wäre.

Bei dieſer Gregorianiſchen Interpolation wäre alles richtig. Da aber die Beobachtungen das Jahr um 20 Sekunden kürzer angeben, ſo muß nothwendig nach einer gewiſſen Zeit eine neue Einſchaltung vorgenommen werden.

Sollte

Sollte die Bestimmung des de la Caille die wahre seyn, so würde (nach §. 14.) der Bruch $\frac{161}{39}$ genauer seyn, als $\frac{400}{97}$, weil dieses lezteren Nenner 97 zwischen die Nenner des fünften und sechsten der oben gefundenen Hauptbrüche hineinfällt. Da aber die Astronomen über die wahre Länge des Jahrs noch nicht ganz einig sind, so will ich diese Materie nicht weiter verfolgen, indem mein Zwek nur gewesen ist, die Theorie der fortlaufenden Brüche zu erläutern, und aus dieser Ursache werde ich auch noch folgendes Beispiel hinzusezen.

II. Beispiel.

§. 20.

Wir haben bereits §. 8. den fortlaufenden Bruch angegeben, der, nach Ludolph, das Verhältniß der Peripherie zum Diameter ausdrükt. Es wird also auch, nach der im vorhergehenden Beispiel angezeigten Art, die Reihe der Brüche berechnet werden können, die diesem Verhältniß immer näher und näher kommen. Sie ist folgende:

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{15}{7}, \frac{1}{106}, \frac{292}{113}, \frac{1}{33102}, \frac{1}{33215}, \frac{1}{66317}$$

$$\frac{1}{312689}, \frac{2}{833719}, \frac{1}{1146408}, \frac{3}{4272943}, \frac{1}{5419351}$$

$$99532 \quad 265381 \quad 364913 \quad 1360120 \quad 1725033$$

$$\frac{14}{80143857}, \frac{2}{165707065}, \frac{1}{245850922}$$

$$25510582 \quad 52746197 \quad 78256779$$

$$\frac{1}{411557987}, \frac{2}{1068966896}, \frac{2}{2549491779}$$
$$\frac{}{131002976} \quad \frac{}{340262731} \quad \frac{}{811528438}$$

$$\frac{2}{6167950454}, \frac{1}{14885392687}, \frac{1}{21053343141}$$
$$\frac{}{1963319607} \quad \frac{}{4738167652} \quad \frac{}{6701487259}$$

$$\frac{84}{178336621653 1}, \frac{2}{3587785776203}$$
$$\frac{}{567663097408} \quad \frac{}{1142027682075}$$

$$\frac{1}{5371151992734}, \frac{1}{8958937768937}$$
$$\frac{}{1709690779483} \quad \frac{}{2851718461558}$$

$$\frac{15}{1397552185267 89}, \frac{3}{428224593349304}$$
$$\frac{}{44485467702853} \quad \frac{}{1363081215701 17}$$

$$\frac{13}{5706674932067741}, \frac{1}{6134899525417045}$$
$$\frac{}{1816491048114374} \quad \frac{}{1952799169684491}$$

$$\frac{4}{3024627303373592 1}, \frac{2}{6662744559288888 7}$$
$$\frac{}{962768772685233 8} \quad \frac{}{2120817462338916 7}$$

$$\frac{6}{4300109465910692 43}$$
$$\frac{}{1368767354671873 40}$$

$$\frac{6}{2646693125139304 345}$$
$$\frac{}{8424685874265132 07}$$

$$\frac{1}{3076704071730373588}$$

$$\frac{}{9793453228937005 47}$$

Diese Brüche werden abwechslungsweise kleiner und grösser, als das wahre Verhältniß des Umfangs eines Zirkels zu seinem Durchmesser seyn. Nemlich $\frac{3}{1}$ ist kleiner, $\frac{22}{7}$ grösser, u. s. w. Jeder derselben aber wird der Wahrheit näher kommen, als jeder andre Bruch, der in einfacheren Zalen ausgedrükt, oder überhaupt, dessen Nenner kleiner wäre.

Was nun den Fehler eines jeden Bruchs anbetrift, so wird derselbe jederzeit kleiner seyn als die Einheit, dividirt durch das Produkt des Nenners dieses Bruchs in den Nenner des nächstfolgenden. Also ist z. B. der Fehler von $\frac{3}{1}$ kleiner, als $\frac{1}{1.7}$, der von $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{7.106}$ u. s. w. Zugleich wird aber auch der Fehler eines jeden Bruchs grösser seyn, als die Einheit, dividirt durch das Produkt von dessen Nenner in die Summe dieses Nenners und des nächstfolgenden Nenners; so daß der Fehler von $\frac{3}{1}$ grösser ist, als $\frac{1}{1.(1+7)}$ oder $\frac{1}{8}$, der von $\frac{22}{7}$ grösser, als $\frac{1}{7(7+106)}$ oder als $\frac{1}{7.113}$ und so weiter. (S. §. 14.)

Wenn man diejenigen Brüche, die kleiner sind, als das Verhältniß der Peripherie zum Diameter von denen, die grösser, als dieses Verhältnis sind, absondert, so kann man durch Hilfe der eingeschalteten

Brüche

Brüche zwei Reihen bilden, wovon die eine ſteigend, die andre fallend iſt, und die ſich beide dem wahren Verhältnis immer mehr und mehr nähern. Sie ſind folgende:

Kleinere Brüche, als $\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}}$.

$$\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}$$

$$\frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \frac{688}{219}$$

$$\frac{1043}{332}, \frac{1398}{445}, \frac{1753}{558}, \frac{2108}{671}, \frac{2463}{784} \text{ &c.}$$

Gröſſere Brüche, als $\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}}$

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}$$

$$\frac{312689}{99532}, \frac{1146408}{364913}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{85563208}{27235615}$$

$$\frac{165707065}{52746197}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{1480524883}{471265707} \text{ &c.}$$

Jeder Bruch der erſten Reihe nähert ſich der Wahrheit mehr, als jeder andre kleinere Bruch, der in einfacheren Zalen ausgedrükt wäre, und jeder Bruch der zweiten Reihe nähert ſich ſtärker als jeder andre gröſſere in einfacheren Zalen ausgedrükte.

Indessen würden diese Reihen sehr weitläufig werden, wenn wir sie, wie in der vorhin berechneten Reihe der Hauptbrüche, fortsetzen wollten. Die Gränzen dieses Werks erlauben nun nicht, sie in ihrer ganzen Ausdehnung hier einzurücken; man findet sie aber im XI. Kapitel von Wallis Algebra (Operum Mathemat. Tom. II.)

Anmerkung.

§. 22.

Die erste Auflösung dieses Problems wurde von Wallis in einem kleinen Traktat gegeben, welcher den Anhang zu den nachgelassenen Werken des Horrocius ausmacht, und ist in der angeführten Stelle seiner Buchstabenrechnung zu finden. Aber die Methode dieses Schriftstellers ist indirekt und ungemein mühsam. Diejenige, die wir hier vorgetragen, hat man dem Huygens zu verdanken, und kann als eine der vorzüglichsten Erfindungen dieses grossen Geometers betrachtet werden. Die Verfertigung seines Planetarii scheint ihm die erste Veranlassung hierzu gegeben zu haben. Denn um die Bewegungen und Perioden der Planeten genau vorzustellen, werden Räder mit einer solchen Anzal von Zähnen erfordert, welche mit jenen Perioden im genauesten Verhältnisse stehen. Da aber die Zähne nicht über eine gewisse Gränze, die von der Grösse des Rads abhängt, vervielfältigt werden können, und die Perioden der Planeten incommensurabel sind, oder doch wenigstens nur in sehr grossen Zalen mit einiger Genauigkeit vorgestellt werden können, so beruht also die ganze Schwierigkeit darauf, Verhältnisse zu finden, die, in kleineren Zalen ausgedrükt, dennoch der Wahrheit

heit so nahe, als möglich, kommen, und zwar näher als jede andre Verhältnisse, die nicht in grösseren Zalen gegeben wären.

Huygens löste diese Frage durch die forlaufenden Brüche auf, nach der Methode die wir oben gezeigt haben. Er lehrte die Art, sie durch fortgesetztes Dividiren zu finden, und bewies sodann die vorzüglichsten Eigenschaften der convergirenden Brüche, jedoch mit Ausnahme der eingeschalteten.

Man sehe in seinem Opere posthumo die Abhandlung Descriptio automati Planetarii.

Andere grosse Geometer haben die fortlaufenden Brüche noch allgemeiner betrachtet. Man findet besonders in den Petersburger Comment. (nemlich im IX. und XI. Bande der ältern, und dem IX. und XI. der neuern), mehrere Abhandlungen von Euler, die voll der gelehrtesten und sinnreichsten Untersuchungen über diese Materie sind; Aber die Theorie dieser Brüche, von der Arithmetischen, und demnach ihrer interessantesten Seite betrachtet, war, wie mich deucht, bisher noch nicht so bearbeitet worden, wie sie es verdiente *), und dieser Umstand hat mich vorzüglich bewogen, diese kleine Abhandlung aufzusetzen, um die

*) In Lamberts Beiträgen, zum Gebrauch der Mathematik, II. Theil III. Abschnitt, findet man ebenfalls eine ziemlich vollständige Abhandlung über die fortlaufenden Brüche.

Anm. d. Ueb.

Geometer mit dieſer wichtigen Materie bekannter zu machen. Man ſehe auch die Berliner Denkwürdigkeiten von 1767 und 1768.

Uebrigens iſt dieſe Theorie durch die ganze Arithmethik von dem ausgedehnteſten Nutzen, und es gibt wenige Probleme in dieſer Wiſſenſchaft, wenigſtens unter denen, bei welchen die gewöhnlichen Regeln nicht zureichen, die nicht mittelbar oder unmittelbar davon abhängen. Johann Bernoulli hat erſt kürzlich eine glükliche und nüzliche Anwendung derſelben bei einer neuen Art von Calcul gezeigt, den er erfunden, um die Verfertigung der Tabellen der Proportionaltheile zu erleichtern. Man ſehe den erſten Band ſeines Werks das den Titel führt: Recueil pour les Aſtronomes.

Zweites Kapitel.

Methode, um diejenigen ganzen Zalen zu bestimmen, welche unbestimmte Formeln mit zwei unbekannten Grössen in Minima verwandeln.

Die Fragen, mit denen wir uns jezt beschäftigen wollen, und für welche wir in diesem Kapitel direkte und allgemeine Methoden geben werden, sind in der unbestimmten Analytik von ganz neuer Art. Noch nie hatte man diese Wissenschaft auf die Probleme von den Größten und Kleinsten angewandt. In den folgenden Untersuchungen werden wir nun die Minima, oder kleinsten Werthe, der rationalen, ganzen und gleichartigen Funktionen mit zwei unbekannten Grössen bestimmen, wenn diese lezteren ganze Zalen seyn sollen. Diese Frage wird uns wieder aut die Theorie der fortlaufenden Brüche zurükführenf und derselben einen neuen Grad von Vollkommenhei, geben.

1. Problem.

§. 23.

Es sey eine bejahte Grösse a gegeben, und y und z bedeuten ganze bejahte Zalen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Man sucht solche

Werthe für dieſe Zalen, wodurch der Ausdruk $y - az$ (ohne Rükſicht auf das Zeichen) in Abſicht auf alle kleinere Zalen, die man ſtatt y und z ſetzen könnte, ein Kleinſtes wird.

Es ſeyen p und q ganze Zalen, die keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, und die für y und z in den Ausdruk $y - az$ geſezt, denſelben kleiner machen, als wenn man andre Zalen, die kleiner als p und q ſind, dafür ſezte. Wenn alſo r und ſ jede andre ganze, bejahte Zalen bedeuten, die keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, und dabei zugleich kleiner, als p und q ſind, ſo muß der Werth von $p - aq$ kleiner als der Werth von $r - a\text{ſ}$ ſeyn. (Wobei man von den Zeichen dieſer Gröſſen abſtrahirt, und ſie alſo beide als bejaht betrachtet.) Laßt uns nun r und ſ ſo annehmen, daß $p\text{ſ} - qr = \pm 1$, wo das obere Zeichen für den Fall gilt, da $p - aq$ bejaht, und das untere für denjenigen, da dieſe Gröſſe verneint iſt. (Wir werden ſogleich ſehen, daß es immer möglich iſt, ſolche Zalen zu finden, die dieſer Bedingung Genüge leiſten.) Diß vorausgeſezt, werde ich jezt beweiſen, daß wenn man ſtatt y und z andre Zalen, die kleiner als p und q ſind, ſezt, der Ausdruk $y - az$ immer gröſſer ſeyn wird, als $p - aq$ und $r - a\text{ſ}$, (wo wir auch hier wieder von den Zeichen abſtrahiren.) Denn wenn $y = pt + ru$, und $z = qt + \text{ſ}u$ geſezt werden, wo t und u unbekannte Gröſſen vorſtellen, ſo erhält man durch Auflöſung dieſer beiden Gleichungen

$$t = \frac{\text{ſ}y - rz}{p\text{ſ} - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - p\text{ſ}}$$

alſo, weil $p\text{ſ} - qr = \pm 1$,

$$t = \pm(\text{ſ}y - rz), \text{ und } u = \pm(qy - pz)$$

woraus

woraus deutlich erhellet, daß t und u immer ganze Zalen seyn werden, weil nach der Voraussetzung p, q, r, s, y und z ganze Zalen sind. Da also t und u ganze Zalen, p, q, r und s aber ganze bejahte Zalen sind, so ist klar, daß, damit die Werthe von y und z kleiner, als p und q werden, die Gröſſen t und u nothwendig verschiedene Zeichen haben müssen.

Es müssen aber auch $r - as$ und $p - aq$ verschiedene Zeichen haben; denn, wenn $p - aq = P$, und $r - as = R$, gesezt werden, so wird $\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}$ und $\frac{r}{s} = a + \frac{R}{s}$ seyn. Aber aus $ps - qr = \pm 1$ folgt $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; folglich $\frac{P}{q} - \frac{R}{s} = \pm \frac{1}{qs}$. Da aber das doppelte Zeichen sich nach $p - aq$ oder nach P richtet, so muß also $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ nothwendig bejaht seyn, wenn P bejaht ist, und verneint, wenn P verneint ist. Weil nun $s < q$ und $R > P$ (nach der Voraussetzung); so ist also um so mehr $\frac{R}{s} > \frac{P}{q}$, (wo wir wiederum von den Zeichen abstrahiren.) Folglich wird die Gröſſe $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ mit $\frac{R}{s}$, d. i. mit R, (weil s immer bejaht ist,) verschiedene Zeichen haben, d. i. P und R werden verschiedene Zeichen haben.

Diß vorausgesezt substituire man nun die für y und z gefundenen Werthe, so ergibt sich

$$y - az = (p - aq)\,t + (r - as)\,u = Pt + Ru.$$

Da aber t und u verschiedene Zeichen haben, so wie auch P und R, so erhellet, daß P t und R u einerlei Zeichen haben, und da t und u überdiß ganze Zalen sind, so muß $y - az$ immer grösser als P und R, das ist, als $p - aq$ und $r - as$ seyn.

Nun fragt sichs noch, ob, wenn p und q gegeben sind, immer solche Zalen r und s gefunden werden können, die kleiner als jene, und zugleich so beschaffen sind, daß $ps - qr = \pm 1$. sey? Diß folgt zwar unmittelbar aus der Theorie der fortlaufenden Brüche, kann aber auch ohne diese Theorie auf eine direkte Art erwiesen werden *). Die Schwierigkeit besteht darinn,

*) Der Beweis aus der Theorie der fortlaufenden Brüche ist folgender: Nach der im vorhergehenden Kapitel gezeigten Methode werde $\frac{p}{q}$ durch Hülfe der fortlaufenden Brüche in eine Reihe Brüche verwandelt, die sich dem Werth $\frac{p}{q}$ immer mehr und mehr nähern. Diese Reihe seye

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'} \ldots\ldots \frac{M}{M'}, \frac{p}{q};$$

so ist, wenn $\frac{M}{M'}$ unmittelbar vor $\frac{p}{q}$ vorangeht, nach dem obenerwiesenen Satze, $pM' - qM = \pm 1$; oder: wenn $M' = s$, und $M = v$ gesezt wird, $ps - qr = \pm 1$. Folglich auch umgekehrt, damit $ps - qr = \pm 1$. sey, muß $\frac{s}{r}$ in obiger Reihe der unmittelbar vor $\frac{p}{q}$ stehende Bruch seyn, welcher demnach sehr leicht gefunden werden kann.

Anm. d. Ueb.

ium, zu beweiſen, daß es nothwendig eine ganze bejahte Zal r gebe, die kleiner als p, und zugleich ſo beſchaffen iſt, daß $q r \pm 1$ mit p theilbar werde. Man ſetze demnach ſtatt r nach und nach alle natürliche Zalen 1, 2, 3, bis p, und dividire die Zalen $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$ ꝛc. $pq \pm 1$ durch p; ſo erhält man p Ueberreſte, die kleiner ſind als p, und nothwendig alle von einander verſchieden ſeyn müſſen. Denn, wenn z. B. $m q \pm 1$ und $n q \pm 1$ (wo m und n unter ſich verſchiedene, ganze Zalen vorſtellen, die kleiner als p ſind,) durch p dividirt einerlei Ueberreſt gäben, ſo müßte ihr Unterſchied $(m - n) q$ durch p theilbar ſeyn. Diß iſt aber unmöglich, weil p und q keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, und $m - n$ kleiner als p iſt. Weil demnach alle Ueberreſte nicht nur bejahte Zalen und kleiner als p, ſondern auch alle untereinander verſchieden ſind; und weil überdiß die Anzal dieſer Ueberreſte p iſt, ſo iſt klar, daß nothwendig auch einer unter denſelben $= 0$, und folglich auch eine der Zalen $q \pm 1$, $2q \pm 1$, ꝛc. $pq \pm 1$ durch p theilbar ſeyn muß. Da diß aber die leztere, nemlich $pq \pm 1$ nie ſeyn kann, ſo folgt alſo, daß es einen Werth r, der kleiner als p iſt, gebe, der ſo beſchaffen iſt, daß $r q \pm 1$ durch p theilbar werde. Zugleich erhellet aber auch, daß dieſer Quotient kleiner als q ſeyn müſſe *) Mithin gibt es immer einen ganzen bejahten

*) Daß ſ kleiner als q ſeyn müſſe, erhellet aus folgendem: $$ſ = \frac{q r \pm 1.}{p}$$
Wäre nun ſ nicht kleiner, als q, ſo müßte es entweder $> q$ oder $= q$ ſeyn.

Es

bejahten Werth r, der kleiner als p, und einen andern s, der kleiner als q ist, die der Gleichung $s = \frac{qr \pm 1}{p}$ oder $ps - qr = \pm 1$. Genüge leisten.

§. 24.

Hieraus sieht man, daß unter den Zalen, die kleiner als p und q sind, r und s diejenigen sind, die den Ausdruk $y - az$ zu einem Kleinsten machen.

Man heisse, der Kürze wegen, die Zalen r und s von nun an p' und q'; so ist also die Bedingung $pq' - qp' = \pm 1$, und die Grössen $p - aq$ und $p' - aq'$ sind die beiden auf einander folgenden Minima in der Reihe der Werthe von $y - az$, wenn statt y und z alle

Es sey im ersten Fall $s = q + z$, wo z eine ganze Zal seyn muß; mithin wäre

$q + z = \frac{qr \pm 1}{p}$; also $qp + pz = qr \pm 1$.

aber $p > r$; also $qp > qr$; folglich $pz < \pm 1$; welches unmöglich ist, da p und z ganze Zalen sind.

Nähme man aber an, es sey $s = q$, so müßte $q = \frac{qr \pm 1}{p}$, und also $pq = qr \pm 1$ seyn. Da aber p, q und r ganze Zalen sind, und überdiß $p > r$ ist; so sey $p = r + z$, wo z also eine ganze Zal seyn muß; folglich wird $qr + qz = qr \pm 1$, und daher $qz = \pm 1$; welches ebenfalls unmöglich ist. Es ist also s weder gröſſer, als q, noch gleich q; folglich kleiner als q.

alle Zalen geſezt werden, die nicht gröſſer als p und q ſind. Dieſe Minima werden verſchiedne Zeichen haben, und das zweite wird unmittelbar gröſſer, als das erſte ſeyn.

Es iſt klar, daß man auf eben dieſelbe Art zwei andre Zalen p^{II} und q^{II} finden kann, die kleiner als p^{I} und q^{I}, und in Abſicht auf dieſe eben das vorſtellen, was p^{I} und q^{I} gegen p und q ſind. Da alſo $p - a\,q$ und $p^{I} - a\,q^{I}$ verſchiedene Zeichen haben, ſo muß $p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = \mp 1$ geſezt werden, und die Gröſſe $p^{II} - a\,q^{II}$ wird ſodann mit $p^{I} - a\,q^{I}$ verſchiedene Zeichen haben, und gröſſer als dieſe leztere, zugleich aber kleiner als jeder andre Werth von $y - a\,z$ ſeyn, wofern y und z kleiner als p^{I} und q^{I} ſind. Sezt man dieſe Schlüſſe weiter fort, ſo wird man wieder neue Zalen p^{III} und q^{III} finden, die kleiner, als p^{II} und q^{II} und ſo ſind, daß $p^{II}q^{III} - q^{II}p^{III} = \pm 1$, und durch welche überdiß die Gröſſen $p^{III} - a\,q^{III}$ und $p^{II} - a\,q^{II}$ nicht nur verſchiedene Zeichen erhalten, ſondern auch die erſtere gröſſer als die andre, aber doch kleiner wird, als wenn man ſtatt p^{III} und q^{III} andre Zalen nähme, die kleiner als p^{II} und q^{II} ſind, u. ſ. w.

Auf dieſe Art ergeben ſich zwei Reihen von abnehmenden ganzen Zalen p, p^{I}, p^{II}, p^{III} ꝛc. q, q^{I}, q^{II}, q^{III} ꝛc. die ſo ſind, daß

$$p\,q^{I} - q\,p^{I} = \pm 1.$$
$$p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = \pm 1. \mp 1$$
$$p^{II}q^{III} - q^{II}p^{III} = \pm 1. \quad \text{ꝛc.}$$

welche die Reihe der Kleinſten

$$p - a\,q$$
$$p^{I} - a\,q^{I}$$
$$p^{II} - a\,q^{II}$$
$$p^{III} - a\,q^{III} \quad \text{ꝛc.}$$

des

des Ausdruks $y - az$ geben werden. Dieſe Minima haben verſchiedene Zeichen, und bilden zugleich eine fallende Reihe, ſo daß jedes Glied wie $p^{II} - aq^{II}$ in Abſicht auf die Werthe von y und z, die kleiner als p^{I} und q^{I} ſind, ein Minimum ſeyn muß.

Hieraus folgt alſo, daß die correſpondirenden Glieder beider Reihen p, p^{I}, p^{II} ꝛc. q, q^{I}, q^{II} ꝛc. ähnliche Eigenſchaften haben, und alle das gegebene Problem auflöſen.

Nun kommt es nur noch darauf an, die beiden Reihen wirklich zu finden.

Ich bemerke alſo 1°. daß wenn man die Gleichungen $pq^{I} - qp^{I} = \pm 1$ und $p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = \mp 1$. addirt, die Summe $(p - p^{II})q^{I} - (q - q^{II})p^{I} = 0$ und daher $q^{I}(p - p^{II}) = p^{I}(q - q^{II})$ ſeyn wird. Weil aber dieſe Gleichung in ganzen Zalen beſtehen ſoll, und p^{I} und q^{I} vermöge der Gleichung $pq^{I} - qp^{I} = \pm 1$. keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben können, ſo muß $p - p^{II}$ durch p^{I} theilbar ſeyn; heißt alſo der Quotient, der aus dieſer Theilung entſpringt, μ, ſo iſt $p - p^{II} = \mu p^{I}$ und $p = \mu p^{I} + p^{II}$, woraus ferner *) $\mu q^{I} = q - q^{II}$, und demnach auch $q = \mu q^{I} + q^{II}$ folgt. Auf eben dieſelbe Art findet man, wenn man die Gleichungen $p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = \pm 1$, und $p^{II}q^{III} - q^{II}p^{III} = \pm 1$. addirt, und ähnlich Schlüſſe wie oben macht, $p^{I} = \mu^{I} p^{II} + p^{III}$, $q^{I} = \mu^{I} q^{II} + q^{III}$, wo μ^{I} eine ganze Zal bedeutet, u. ſ. w.

Das

*) Wenn nemlich in $q^{I}(p - p^{II}) = p^{I}(q - q^{II})$, anſtatt $p - p^{II}$ der Werth μp^{I} geſezt, und auf beiden Seiten mit p^{I} dividirt wird.

A. d. U.

Das Gesez dieser beiden Reihen ist demnach:

$$\begin{array}{llll} p = \mu\ p^{I} + p^{II} & & q = \mu\ q + q^{II} \\ p^{I} = \mu^{I}\ p^{II} + p^{III} & & q^{I} = \mu^{I}\ q^{II} + q^{III} \\ p^{II} = \mu^{II}\ p^{III} + p^{IV} & & q^{II} = \mu^{II}\ q^{III} + q^{IV} \\ p^{III} = \mu^{III}\ p^{IV} + p^{V} & & q^{III} = \mu^{III}\ q^{IV} + q^{V} \\ \text{\&c.} & & \text{\&c.} \end{array}$$

wo die Zalen μ, μ^{I}, μ^{II} ꝛc. alle ganze, bejahte Zalen, und p, p^{I}, p^{II}, p^{III} ꝛc. q, q^{I}, q^{II}, q^{III} ꝛc. zwei fallende Reihen bilden.

Aus diesem Gesetze sieht man, daß man nur die Zalen μ, μ^{I}, μ^{II} ꝛc. zu wissen brauche, um alle Glieder beider Reihen zu finden, wenn man anders die zwei lezten Glieder derselben weiß.

Substituirt man nun obige Werthe, so ergibt sich

$$\begin{array}{l} p - aq = \mu\ (p^{I} - aq^{I}) + p^{II} - aq^{II} \\ p^{I} - aq^{I} = \mu^{I}\ (p^{II} - aq^{II}) + p^{III} - aq^{III} \\ p^{II} - aq^{II} = \mu^{II}\ (p^{III} - aq^{III}) + p^{IV} - aq^{IV} \\ p^{III} - aq^{III} = \mu^{III}\ (p^{IV} - aq^{IV}) + p^{V} - aq^{V} \\ \text{\&c.} \end{array}$$

Woraus

$$\mu = \frac{p - aq}{p^{I} - aq^{I}} + \frac{aq^{II} - p^{II}}{p^{I} - aq^{I}}$$

$$\mu^{I} = \frac{p^{I} - aq^{I}}{p^{II} - aq^{II}} + \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{II} - aq^{II}}$$

$$\mu^{II} = \frac{p^{II} - aq^{II}}{p^{III} - aq^{III}} + \frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p^{III} - aq^{III}}$$

Man hat aber oben gesehen, daß die Grössen $p - aq$, $p^{I} - aq^{I}$, $p^{II} - aq^{II}$ ꝛc. eine Reihe von Gliedern bilden, die immer zunehmen und abwechslungsweise bejaht und verneint sind; woraus folgt, daß die

die Brüche $\frac{p - aq}{p^{I} - aq^{I}}, \frac{p^{I} - aq^{I}}{p^{II} - aq^{II}}, \frac{p^{II} - aq^{II}}{p^{III} - aq^{III}}$ &c. alle verneinte Werthe haben, die kleiner als die Einheit sind, und daß im Gegentheil die Brüche $\frac{aq^{II} - p^{II}}{p^{I} - aq^{I}}$ $\frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{II} - aq^{II}}$ ꝛc. alle bejaht und grösser als die Einheit sind. Da also die ersteren zwischen den Gränzen o und — 1 enthalten sind, so kann man diese Gränzen statt derselben setzen, woraus

$$\mu < \frac{aq^{II} - p^{II}}{p^{I} - aq^{I}} > \frac{aq^{II} - p^{II}}{p^{I} - aq^{I}} - 1.$$

$$\mu^{I} < \frac{a^{III} - qp^{III}}{p^{II} - aq^{II}} > \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{II} - aq^{II}} - 1.$$

$$\mu^{II} < \frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p^{III} - aq^{III}} > \frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p^{III} - aq^{III}} - 1. \text{ ꝛc.}$$

Es ist aber klar, daß diese Gränzen hinreichen, um die Zalen μ, μ^{I}, μ^{II} ꝛc. zu bestimmen, weil man weiß, daß es lauter ganze Zalen seyn müssen. Auf diese Art hängt die Bestimmung von μ nur von den vier Gliedern p^{I}, p^{II}, q^{I}, q^{II}, die von μ^{I} nur von p^{II}, p^{III}, q^{II}, q^{III}, ab, u. s. w. Kennt man also die Werthe von p^{I}, p^{II}, q^{I}, q^{II}, so findet sich zuerst μ, und sodann hieraus p und q aus den Formeln $p = \mu p^{I} + p^{II}$, $q = \mu q^{I} + q^{II}$.

Eben so findet sich μ^{I} aus den Gliedern p^{II}, p^{III}, q^{II}, q^{III}, vermöge der Bedingung $\mu^{I} < \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{II} - aq^{II}}$ >

$> \frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''} - 1$; hieraus ergibt ſich p^I, q^I aus den Formeln $p' = \mu' p'' + p'''$, $q' = \mu' q'' + q'''$, ſodann μ, und endlich hieraus p und q u. ſ. w.

Aus dieſen Betrachtungen folgt alſo, daß man nur die zwei lezten Glieder von jeder der beiden correſpondirenden Reihen p, p′, p″ ꝛc. q, q′, q″ ꝛc. zu wiſſen brauche, um von denſelben zu allen übrigen Gliedern hinauf zu ſteigen, und alſo die beiden Reihen ganz zu beſtimmen.

So wäre alſo dieſes Problem darauf zurükgeführt, daß nur die beiden lezten Glieder jener Reihen geſucht werden dürfen.

Es müſſen aber beide Reihen, ihrer Natur nach, ſich mit o endigen; denn aus den Formeln $p = \mu p' + p''$, $p' = \mu' p'' + p'''$ ꝛc. erhellet, daß μ der Quotient und p der Reſt der Diviſion von p durch p′ iſt, daß μ' der Quotient und p‴ der Reſt der Diviſion von p′ durch p″ iſt, u. ſ. w., ſo daß alſo p″, p‴ ꝛc. die Ueberreſte vorſtellen, auf die man geräth, wenn man den gröſten gemeinſchaftlichen Theiler der beiden Zalen p und p′ ſucht, welche leztere nach der Vorausſezung unter ſich Primzalen ſind; folglich muß man nothwendig auf einen Reſt kommen, der = o iſt. Eben diß gilt auch von den Zalen q″, q‴ ꝛc. die nichts anders ſind, als die verſchiedenen Ueberreſte, die aus der Unterſuchung des gröſten gemeinſchaftlichen Theilers von q und q′ entſpringen.

Geſezt nun die Reihe q, q′, q″ ꝛc. endige ſich vor der correſpondirenden Reihe p, p′, p″ ꝛc. und

es sey z. B. $q^{IV} = o$; so verwandelt sich die Gleichung $p^{III} q^{IV} - q^{III} p^{IV} = \mp 1$ in $q^{III} p^{IV} = \pm 1$, und weil q^{III} und p^{IV} nichts anders als bejahte Zalen seyn können, so folgt hieraus, daß $q^{III} = 1$ und $p^{IV} = 1$ sey; mithin verwandeln sich die beiden Grössen $p^{III} - a q^{III}$, $p^{IV} - a q^{IV}$ in $p^{III} - a$ und 1. Wir haben aber gezeigt, daß diese Grössen verschiedene Zeichen haben, und daß (ohne Rükſicht auf die Zeichen) die zweite grösser als die erste sey, weil dieselben die auf einander folgenden Glieder der Reihe der kleinsten Werthe sind; folglich muß $a - p^{III} > o$ und < 1, und mithin $p^{III} < a$ und $> a - 1$ seyn.

Also ist p^{III} bekannt, weil diese Grösse eine ganze Zal seyn muß, und daher keine andere seyn kann, als diejenige, die zwischen a und $a - 1$ fällt.

In dem Fall, von dem also gegenwärtig die Rede ist, sind die zwei lezten Glieder der Reihe q, q^{I}, q^{II} ꝛc. 1, o; und die correspondirenden der Reihe p, p^{I}, p^{II} ꝛc. α und 1, wo α diejenige ganze Zal bedeutet, die zwischen a und $a - 1$ fällt.

Gesezt nun auch, die ganze Reihe p, p^{I}, p^{II} ꝛc. endige sich zuerst, und es sey, z. B. $p^{IV} = o$; alsdann wird die Gleichung $p^{III} q^{IV} - q^{III} p^{IV} = \mp 1$ diese: $p^{III} q^{IV} = \mp 1$, und da p und q bejaht seyn müssen, so folgt, daß $p^{III} = 1$, $q^{IV} = 1$ ist, und daß mithin die zwei Grössen $p^{III} - a q^{III}$, $p^{IV} - a q^{IV}$, welche nicht nur verschiedene Zeichen haben, sondern von denen die zweite auch grösser als die erste seyn muß, sich in $1 - a q'''$, und $-a$ verwandeln; woraus dann weiter folgt, daß $1 - a q''' > o$ und $< a$ sey; diß gibt $q''' < \frac{1}{a}$

und

und $q''' + 1 > \frac{1}{a}$, und folglich $q''' < \frac{1}{a}$, $> \frac{1}{a} - 1$; d. i. q''' muß diejenige ganze Zal seyn, die zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} - 1$ fällt.

Also werden überhaupt in diesem zweiten Fall die zwei lezten Glieder der Reihe p, p′, p″ ꝛc. 1, 0; und die correspondirenden in der Reihe q, q′, q″ ꝛc. β, 1, wo β diejenige ganze Zal bedeutet, die zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} - 1$ fällt.

Man sieht hieraus, daß der erste Fall immer statt findet, wenn a grösser, und der zweite, wenn a kleiner als die Einheit ist.

Kennt man nun aber die beiden lezteren Glieder der correspondirenden Reihen p, p′, p″ ꝛc. und q′, q′, q″ ꝛc. so lassen sich auch vermittelst der oben gegebenen Formeln alle übrigen Glieder jener Reihen finden, die das Problem auflösen.

§. 25.

Es ist bequemer, beide Reihen rükwärts zu betrachten, und bei den leztern Gliedern anzufangen. Auf diese Art erhalten wir zwei steigende Reihen, die wir, der Bequemlichkeit wegen, also vorstellen wollen $p^0, p^I, p^{II}, p^{III}$ ꝛc. $q^0, q^I, q^{II}, q^{III}$ ꝛc. und für welche wir folgende Bestimmungen haben:

Wenn $a > 1$.

$p^0 = 1$, $p^I < a > a - 1$, $q^0 = 1$, $q^I = 1$.

Wenn $a < 1$.

$$p^{\circ} = 0,\ p^{I} = 1,\ q^{\circ} = 1,\ q^{I} < \frac{I}{a} > \frac{I}{a} - 1;$$

ferner

$$p^{II} = \mu^{I}\ p^{I} + p^{\circ} \qquad q^{II} = \mu^{I}\ q^{I} + q^{\circ}$$
$$p^{III} = \mu^{II}\ p^{II} + p^{I} \qquad q^{III} = \mu^{II}\ q^{II} + q^{I}$$
$$p^{IV} = \mu^{III}\ p^{III} + p^{II} \qquad q^{IV} = \mu^{III}\ q^{III} + q^{II}$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

und zur Beſtimmung von μ^{I}, μ^{II}, μ^{III} ꝛc. folgende Bedingungen:

$$\mu^{I} < \frac{p^{\circ} - aq^{\circ}}{aq^{I} - p^{I}} > \frac{p^{\circ} - aq^{\circ}}{aq^{I} - p^{I}} - 1.$$

$$\mu^{II} < \frac{p^{I} - aq^{I}}{aq^{II} - p^{II}} > \frac{p^{I} - aq^{I}}{aq^{II} - p^{II}} - 1.$$

$$\mu^{III} < \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}} > \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}} - 1.$$

$$\text{ꝛc.}$$

Es iſt noch zu bemerken, daß der zweite Fall aus dem erſten folgt. Denn, wenn man in den Formeln des erſten Falls $a < 1$ ſezt, ſo erhält man nothwendig $p^{I} < a > a - 1 = 0$; folglich $p^{\circ} = 1$, $p^{I} = 0$, $q^{\circ} = 0$, $q^{I} = 1$, und hieraus $\mu^{I} < \frac{I}{a} > \frac{I}{a} - 1$, $p^{II} = 1$, $q^{II} = \mu^{I}$; ſo daß hier p^{I}, p^{II} und q^{I}, q^{II} eben das ſind, was p°, p^{I}, q°, q^{I} nach den Formeln des zweiten Falls ſeyn würden, und folglich werden in beiden Fällen die folgenden Glieder eben dieſelben ſeyn.

Was demnach auch a für eine Zal ſeyn mag, ſo kann man immer folgende Beſtimmungen feſtſezen:

$$p^{\circ} = 1.$$

$$p^{\circ} = 1. \qquad q^{\circ} = 0.$$
$$p^{I} = \mu. \qquad q^{I} = 1.$$
$$p^{II} = \mu^{I} p^{I} + 1. \qquad q^{II} = \mu^{I}.$$
$$p^{III} = \mu^{II} p^{II} + p^{I}. \qquad q^{III} = \mu^{II} q^{II} + q^{I}$$
$$p^{IV} = \mu^{III} p^{III} + p^{II} \qquad q^{IV} = \mu^{III} q^{III} + q^{II}$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

hernach $\mu < a.$

$$\mu^{I} < \frac{p^{\circ} - aq^{\circ}}{aq^{I} - p^{I}} \lessdot \frac{1}{a - \mu}.$$

$$\mu^{II} < \frac{aq^{I} - p^{I}}{p^{II} - aq^{II}}$$

$$\mu^{III} < \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}}$$

$$\mu^{IV} < \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{IV} - aq^{IV}} \quad \text{&c.}$$

wo das Zeichen $<$ diejenige ganze Zal bedeutet, die unmittelbar kleiner ist, als der Werth der hinter diesem Zeichen stehenden Grösse.

Auf diese Art findet man also nach und nach alle Werthe von p und q, welche das Problem auflösen; denn diese Werthe können keine andre seyn, als die correspondirenden Glieder der beiden Reihen p°, p', p'', p''' &c. q°, q' q'', q''' &c.

1. Zusaz.

§. 26.

Wenn $b = \frac{p^{\circ} - aq^{\circ}}{aq' - p'}$

$$c = \frac{aq' - p'}{p'' - aq''}$$

$$d = \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''}$$ ꝛc. geſezt wird,

ſo erhält man

$$b = \frac{1}{a - \mu}$$

$$c = \frac{1}{b - \mu'}$$

$$d = \frac{1}{c - \mu''}$$ ꝛc.

und $\mu < a$; $\mu' < b$; $\mu'' < c$; $\mu''' < d$ ꝛc.; folglich ſind die Zalen μ, μ', μ'' ꝛc. keine andre, als eben diejenigen, welche wir §. 3. mit α, β, γ ꝛc. bezeichnet haben; d. i. es ſind die Glieder des fortlaufenden Bruchs, der den Werth a ausdrükt, ſo, daß ſeyn wird

$$a = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + 1}}}$$

folglich werden die Zalen p', p'', p''' ꝛc. die Zäler, und q', q'', q''' ꝛc. die Nenner der ſich der Gröſſe a nähernden Brüche ſeyn, welche wir §. 10 durch $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ &c. vorgeſtellt haben.

Alles läuft alſo darauf hinaus, den Werth von a in einen fortlaufenden Bruch zu verwandeln, deſſen ſämt-

sämtliche Glieder bejaht sind, welches nach dem obigen leicht geschehen kann, weil man nur immer die nächst kleineren Werthe nehmen darf; alsdann mache man eine der Grösse a sich nähernde Reihe von Hauptbrüchen; so werden die Glieder eines jeden einzelnen derselben die Werthe von p und q seyn, die das Problem auflösen, so daß also $\frac{p}{q}$ nichts anders, als einer von diesen Brüchen seyn kann.

2. Zusaz.

§. 27.

Diß wäre also eine neue Eigenschaft der fortlaufenden Brüche. Wenn nemlich $\frac{p}{q}$ einer von den Hauptbrüchen ist, die sich der Grösse a nähern (wenn sie anders aus demjenigen fortlaufenden Bruch hergeleitet worden, dessen Glieder alle bejaht sind), so wird die Grösse $p - aq$, (wenn von den Zeichen abstrahirt wird), immer einen kleineren Werth haben, als wenn statt p und q jede andre kleinere Zalen gesezt würden.

2. Problem.

§. 28.

Es sey die Grösse $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q + \text{ꝛc.} \ldots + Vq$ gegeben, in welcher A, B, C ꝛc. ganze, gegebene bejahte oder verneinte Zalen vorstellen, und p und q unbestimmte aber ganze und bejahte Grössen seyn sollen. Man sucht solche Werthe für p und q, daß die gegebene Grösse so klein, als möglich werde.

Auflöſung.

Es ſeyen α, β, γ ꝛc. die wirklichen, und $\mu \pm \nu \sqrt{-1}$, $\pi \pm \varrho \sqrt{-1}$ ꝛc. die eingebildeten Wurzeln der Gleichung $A\lambda^m + B\lambda^{m-1} + C\lambda^{m-2} + \text{ꝛc.} + V = 0$; ſo folgt aus der Theorie der Gleichungen, daß

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \text{ꝛc. } Vq^m$$
$$= A\,(p-\alpha q)\,(p-\beta q)\,(p-\gamma q)\ldots.$$
$$\left(p-(\mu+\nu\sqrt{-1})\,q\right)\left(p-(\mu-\nu\sqrt{-1})\,q\right)$$
$$\left(p-(\pi+\varrho\sqrt{-1})\,q\right)\left(p-(\pi-\varrho\sqrt{-1})\,q\right)$$
$$\ldots. \text{ oder } = A\,(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots$$
$$\left((p-\mu q)^2+\nu^2 q^2\right)\left((p-\pi q)^2+\varrho^2 q^2\right)$$
$$\ldots\ldots \text{ ſey.}$$

Folglich kommt es alſo darauf an, daß das Produkt der Gröſſen $p-\alpha q$, $p-\beta q$, $p-\gamma q$ ꝛc. und $(p-\mu q)^2+\nu^2 q^2$, $(p-\pi q)^2+\varrho^2 q^2$ ꝛc. ſo klein, als möglich werde, wenn p und q ganze bejahte Zalen vorſtellen.

Wir wollen nun annehmen, die Werthe von p und q, welche ein Minimum geben, ſeyen bereits gefunden. Wenn demnach ſtatt p und q andre, kleinere Zalen geſezt werden, ſo muß das obige Produkt gröſſer werden. Alſo muß nothwendig der Werth von irgend einem der Faktoren deſſelben zunehmen. Es iſt aber klar, daß, wenn, z. B. α verneint wäre, der Faktor $p-\alpha q$ immer abnehmen müßte, wenn p und q abnähmen; eben diß gilt auch von dem Faktor $(p-\mu q)^2+\nu^2 q^2$, wenn μ verneint wäre, und ſo von den übrigen. Hieraus folgt, daß unter den einfachen

fachen wirklichen Faktoren, nur diejenigen, deren Wurzeln bejaht ſind, zunehmen können; und unter den doppelten eingebildeten Faktoren, können nur diejenigen vermehrt werden, bei denen der wirkliche Theil der eingebildeten Wurzel bejaht iſt. Ueberdiß iſt noch in Abſicht auf dieſe lezteren zu bemerken, daß, damit $(p-\mu q)^2+\nu^2 q^2$ zunehmen könne, wenn p und q abnehmen, nothwendig der Theil $(p-\mu q)$ zunehmen müſſe, weil das andre Glied $\nu^2 q^2$ nothwendig abnimmt; folglich hängt die Vermehrung dieſes Faktors von der Gröſſe $p-\mu q$ ab. Eben diß gilt auch von den übrigen.

Die Werthe von p und q, welche ein Minimum geben, müſſen demnach ſo beſchaffen ſeyn, daß die Gröſſe $p-aq$ zunimmt, wenn p und q kleinere Werthe bekommen, und man anſtatt a eine von den bejahten wirklichen Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^m+B\lambda^{m-1}+C\lambda^{m-2}+V=0$$

oder einen wirklichen bejahten Theil einer eingebildeten Wurzel eben dieſer Gleichung nimmt, wenn welche vorhanden ſind.

Es ſeyen r und ſ ganze bejahte Zalen, und zwar ſolche, die kleiner als p und q ſind, ſo muß $r-a\mathfrak{f}>p-aq$ ſeyn, (wo von den Zeichen dieſer zwei Unterſchiede abſtrahirt wird.) Man ſetze nun, wie §. 23. dieſe Zalen ſeyen ſo, daß $p\mathfrak{f}-qr=\pm 1$; wo das obere Zeichen für den Fall gilt, wenn $p-aq$ verneint iſt, ſo daß die zwei Gröſſen $p-aq$ und $r-a\mathfrak{f}$ verſchiedne Zeichen haben; ſo iſt diß vollkommen eben der Fall, auf welchen wir das vorhergehende Problem §. 24. zurükgeführt haben, und deſſen Auflöſung bereits gegeben worden iſt.

Alſo müſſen (§. 26.) die Werthe von p und q nothwendig unter den Gliedern derjenigen Hauptbrüche gefunden werden, die ſich a, d. i. einer von denjenigen Gröſſen nähern, von denen wir oben geſagt haben, daß man ſie ſtatt a ſetzen könne.

Alſo verwandle man alle jene Gröſſen in fortlaufende Brüche (welches durch die bereits erklärte Methode leicht geſchehen kann), und leite ſodann alle convergirende Brüche, von denen hier die Rede iſt, daraus ab. Sodann ſetze man nach und nach p allen Zälern dieſer Brüche, und q allen correſpondirenden Nennern derſelben gleich, ſo wird diejenige dieſer Vorausſetzungen, welche den kleinſten Werth der vorgegebenen Funktion gibt, auch eben diejenige ſeyn, welche das geſuchte Minimum bewirkt.

1. Anmerkung.

§. 29.

Wir haben angenommen, daß die beiden Zalen p und q bejaht ſeyen. Es iſt klar, daß, wenn beide verneint wären, keine Veränderung in dem abſoluten Werthe der vorgegebenen Formel vorgienge; im Fall nemlich m ungerad wäre, würde nur das Zeichen jenes Werths verändert werden, für ein gerades m aber bliebe alles ganz unverändert; haben aber p und q verſchiedene Zeichen, ſo iſt der Fall ganz anders; weil alsdann die Glieder der gegebenen Gleichung abwechslungsweiſe ihre Zeichen verändern, welches auch eine Veränderung in den Zeichen der Wurzeln α, β, γ ꝛc. $\mu \pm \nu \sqrt{-1}$; $\pi \pm \varrho \sqrt{-1}$. nach ſich zieht, ſo daß diejenigen von den Gröſſen α, β, γ ꝛc. μ, π ꝛc. welche verneint, und folglich im erſten

Falle

Falle unnüz waren, in dieſem leztern Falle bejaht, und ſtatt der andern gebraucht werden.

Hieraus folgt alſo allgemein, daß wenn ein Minimum bei der vorgegebenen Formel geſucht wird, ohne irgend eine andre Einſchränkung als dieſe, daß p und q ganze Zalen ſeyn ſollen, man anſtatt a alle wirkliche Wurzeln α, β, γ ꝛc. und alle wirkliche Glieder μ, π ꝛc. der unmöglichen Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^m + B\lambda^{m-1} + C\lambda^{m-2} \ldots\ldots + V = 0.$$

ſetzen, und ganz von den Zeichen dieſer Grössen abſtrahiren, zulezt aber p und q einerlei, oder verſchiedene Zeichen geben müſſe, je nachdem die Grösſe, welche ſtatt a angenommen worden, urſprünglich bejaht oder verneint war.

2. Anmerkung.

§. 30.

Wenn unter den wirklichen Wurzeln α, β, γ ꝛc. ſolche ſich befinden, die commenſurabel ſind, ſo muß die gegebene Grösſe = o werden, wenn man $\frac{p}{q}$ einer dieſer Wurzeln gleich ſezt; in dieſem Fall gibt es alſo, eigentlich zu reden, kein Minimum; in allen andern Fällen wird es unmöglich ſeyn, daß die Grösſe, von der die Rede hier iſt, o werde, wenn p und q ganze Zalen ſind. Da aber die Coefficienten A, B, C ꝛc. nach der Vorausſetzung ebenfalls ganze Zalen ſind, ſo wird gewiß dieſe Grösſe einer ganzen Zal gleich, und folglich nie kleiner als 1 ſeyn.

Wenn daher die Gleichung

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 \ldots\ldots + Vq^m = \pm 1.$$

in ganzen Zalen aufgelöſt werden ſoll, ſo muß man die Werthe von p und q durch die Methode des vorhergehenden Problems ſuchen, auſſer in dem Fall, wenn die Gleichung

$$A\lambda^m + B\lambda^{m-1} + C\lambda^{m-2} \ldots\ldots + V = 0$$

commenſurable Wurzeln oder Theiler hat, weil alsdann $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 \ldots\ldots +$ ꝛc. in zwei oder mehrere ähnliche Gröſſen von niedrigerem Grade aufgelöſt werden kann; ſo daß eine jede dieſer einzelnen Formeln für ſich der Einheit gleich ſeyn muß, und man daher wenigſtens zwei Gleichungen zur Beſtimmung von p und q bekommt. Ich habe bereits an einem andern Orte (Denkwürdigkeiten der Berliner Akad. 1768) eine Auflöſung dieſes leztern Problems gegeben; aber diejenige, die hier in dieſem Kapitel angezeigt worden, iſt einfacher und direkter, obgleich beide aus ebenderſelben Theorie der fortlaufenden Brüche hergeleitet ſind.

3. Problem.

§. 31.

Man ſucht diejenigen Werthe von p und q in ganzen Zalen, welche die Gröſſe $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ ſo klein als möglich machen.

Auflöſung.

Dieſes Problem iſt, wie man ſiehet, nur ein beſonderer Fall des Vorhergehenden. Es iſt aber der Mühe werth, beſonders von demſelben zu handeln, weil es einer ſehr einfachen zierlichen Auflöſung fähig iſt, von der wir in der Folge bei Auflöſung der Gleichungen mit zwei unbekannten Gröſſen in ganzen Zalen Gebrauch machen werden. Nach der allgemeinen

Me-

Methode muß man alſo damit anfangen, die Wurzeln der Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

zu ſuchen, welche, wie bekannt,

$$= -\frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}$$

ſind.

Aber

1) Wenn $B^2 - 4AC$ einem wirklichen Quadrat gleich iſt, ſo werden die beiden Wurzeln commenſurabel ſeyn, und folglich gibt es eigentlich kein Minimum, weil die Gröſſe $Ap^2 + Bqp + Cq^2 = 0$ werden kann.

2) Wenn $B^2 - 4AC$ kein Quadrat iſt, ſo werden die beiden Wurzeln irrational, oder eingebildet, ſeyn, und $B^2 - 4AC$ iſt entweder > 0 oder < 0. Diß gibt zwei Fälle. Wir fangen mit dem lezteren, als dem leichteſten, an.

Erſter Fall, wenn $B^2 - 4AC < 0$.

§. 32.

Da die beiden Wurzeln in dieſem Falle eingebildet ſind, ſo iſt $-\frac{B}{2A}$ der einzige wirkliche Theil derſelben, welcher alſo anſtatt a angenommen werden muß.

Es muß demnach der einzige Bruch $\frac{-B}{2A}$ (wo 0 von dem Zeichen deſſelben einſtweilen abſtrahirt wird), nach der Methode des §. 4., in einen fortlaufenden Bruch verwandelt werden. Aus dieſem bilde man ſodann, nach §. 10., eine Reihe von convergirenden Brüchen,

Brüchen, welche nothwendig irgendwo abbricht. Nachdem diß geschehen, so setze man anstatt p alle Zäler dieser Brüche, und anstatt q die correspondirenden Nenner. Nur ist wohl zu bemerken, daß p und q entweder einerlei oder verschiedene Zeichen haben müssen, je nachdem $-\frac{B}{2A}$ entweder bejaht oder verneint ist. Auf diese Art finden sich diejenigen Werthe von p und q, welche die vorgegebene Formel zu einem Minimum machen.

Beispiel.

Die gegebene Grösse, welche ein Minimum werden soll, sey $49\,p^2 - 238\,pq + 290\,q^2$.

Es ist also hier $A = 49$, $B = -238$, $C = 290$. mithin $B^2 - 4AC = -196$; und $-\frac{B}{2A} = \frac{17}{7}$.

Wenn man daher nach §. 4. mit diesem Bruche verfährt, so finden sich die Quotienten 2, 2, 3 und aus diesen nach §. 20. folgende Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{17}{7}$$

so, daß 1, 2, 5, 17 statt p und 0, 1, 2, 7 statt q gesezt werden können. Wenn man aber die vorgegebene Grösse P heißt, so findet sich

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49

woraus man siehet, daß der kleinste Werth $P = 5$ ist, welcher

welcher aus den Voraussetzungen $p = 5$, und $q = 2$ entsteht; man kann also allgemein hieraus schliessen, daß die gegebene Formel nie kleiner als 5 werden könne, wenn p und q ganze Zalen seyn sollen; so daß demnach ein Minimum statt findet, wenn $p = 5$ und $q = 2$ angenommen wird.

Zweiter Fall, wenn $B^2 - 4AC > 0$.

§. 33.

Da in diesem Falle die Gleichung $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ zwei wirkliche irrationale Wurzeln hat, so muß man beide in fortlaufende Brüche verwandeln. Diese Operation kann ausserordentlich leicht vermittelst einer besondern Methode geschehen, die ich anderswo erklärt habe, die aber auch ganz natürlich aus den Formeln des §. 25. fließt, und alle zur vollständigen und allgemeinsten Auflösung des gegebenen Problems nöthige Principien enthält. Wir wollen daher durch a diejenige Wurzel bezeichnen, welche in einen fortlaufenden Bruch verwandelt werden soll, und welche wir immer bejaht annehmen werden, und b sey die andre Wurzel; so ist, wie bekannt,

$a + b = -\frac{B}{A}$ und $ab = \frac{C}{A}$, woraus

$a - b = \frac{\gamma(B^2 - 4AC)}{A}$ folgt. Es sey, der Kürze wegen, $\gamma(B^2 - 4AC) = \gamma E$, und mithin

$a - b = \frac{\gamma E}{A}$; wo die Wurzelgrösse γE bejaht oder verneint seyn kann; Sie wird nemlich bejaht seyn, wenn die Grösse a die grössere der beiden Wurzeln, und verneint, wenn sie die kleinere ist; also

a =

$$a = -\frac{B+\gamma E}{2A}, \quad b = -\frac{B-\gamma E}{2A}.$$

Wenn nun die Benennungen des §. 25. beibehalten werden, ſo hat man blos den vor a ſo eben gefundenen Werth zu ſubſtituiren, und die ganze Schwierigkeit beſteht ſodann darinn, die ganze Gröſſen μ', μ'', μ''' ꝛc. auf eine leichte Art zu beſtimmen.

Um dieſen Zwek zu erreichen, multiplicire ich ſowol die Zäler als Nenner der Brüche

$$\frac{p^\circ - aq^\circ}{aq' - p'}, \quad \frac{aq' - p'}{p'' - aq''}, \quad \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''} \quad \&c.$$

reſpektive durch $A(bq' - p')$, $A(p'' - bq'')$ &c. Nun iſt $A(p^\circ - aq^\circ)(p^\circ - bq^\circ) = A$.

$A(aq' - p')(bq' - p') = A(p')^2 - A(a+b)p'q' + Aab(q')^2 = A(p')^2 + Bp'q' + C(q')^2$;

$A(p'' - aq'')(p'' - bq'') = A(p'')^2 - A(a+b)p''q'' + Aab(q'')^2 = A(p'')^2 + Bp''q'' + C(q'')^2$ &c.; u. $A(p^\circ - aq^\circ)(bq' - p') = -\mu A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\gamma E$; $A(aq' - p')(p'' - bq'') = -Ap'p'' + Aap''q' + Abp'q'' - Aabq'q'' = -Ap'p'' - Cq'q'' - \frac{1}{2}B(p'q'' + q'p'') + \frac{1}{2}\gamma E(p''q' - q''p')$; $A(p'' - aq'')(bq''' - p''') = -Ap''p''' + Aap'''p'' + Abp''q''' - Aabq''q''' = -Ap''p''' - Cq''q''' - \frac{1}{2}B(p''q''' + q''p''') + \frac{1}{2}\gamma E(p'''q'' - q'''p'')$ und ſo weiter.

Man

Man ſetze nun, der Kürze wegen,

$P^\circ = A.$

$P' = A(p')^2 + Bp'q' + C(q')^2$

$P'' = A(p'')^2 + Bp''q'' + C(q'')^2$

$P''' = A(p''')^2 + Bp'''q''' + C(q''')^2$ &c.

$Q^\circ = \frac{1}{2}B.$

$Q' = A\mu + \frac{1}{2}B.$

$Q'' = Ap'p'' + \frac{1}{2}B(p'q'' + q'p'') + Cq'q''.$

$Q''' = Ap''p''' + \frac{1}{2}B(p''q''' + q''p''') + Cq''q'''$

ſo erhält man, weil $p''q' - q''p' = 1$; $p'''q'' - q'''p'' = -1$; $p^{IV}q^{III} - q^{IV}p^{III} = 1$; ꝛc. folgende Formeln:

$$\mu < -\frac{Q^\circ + \frac{1}{2}\nu E}{P^\circ}$$

$$\mu' < -\frac{Q^I - \frac{1}{2}\nu E}{P^I}$$

$$\mu'' < -\frac{Q^{II} + \frac{1}{2}\nu E}{P^{II}}$$

$$\mu''' < -\frac{Q^{III} - \frac{1}{2}\nu E}{P^{III}}$$ &c.

Nun ſetze man aber in dem Ausdruk Q'' ſtatt p'' und q'' ihre Werthe $\mu' p' + 1$ und μ', ſo wird derſelbe $= \mu' P' + Q'$; ferner wenn in Q''' ſtatt p''' und q''' die Werthe $\mu'' p'' + p'$ und $\mu'' q'' + q'$ geſezt werden, ſo wird dieſer Ausdruk $= \mu'' P'' + Q''$ u. ſ. w. ſo daß

$Q^I = \mu P^\circ + Q^\circ$

$Q^{II} = \mu^I P^I + Q^I$

$Q^{III} = \mu^{II} P^{II} + Q^{II}$

$Q^{IV} = \mu^{III} P^{III} + Q^{III}$ &c.

Eben so, wenn man in P'' die Werthe von p'' und q'' setzt, verwandelt sich dieser Ausdruk in

$$(\mu')^2 = P' + 2\mu' Q' + A.$$

und wenn die Werthe von p''' und q''' in P''' gesezt werden, so wird $P''' = (\mu'')^2 + 2\mu'' Q'' + P'$ und so weiter; so daß also

$$P' = \mu^2 P^\circ + 2\mu Q^\circ + C$$
$$P'' = (\mu')^2 P' + 2\mu' Q' + P^\circ$$
$$P''' = (\mu'')^2 P'' + 2\mu'' Q'' + P' \text{ &c.}$$

Auf solche Art kann man also, vermittelst dieser Formeln, die Reihen der Zalen μ, μ', μ'', Q°, Q', Q'' und P°, P', P'' ꝛc. nach Belieben fortsetzen, welche, wie man siehet, wechselseitig von einander abhangen, und worinn die Werthe p°, p', p'' ꝛc. und q°, q', q'' ꝛc. nicht mehr vorkommen.

Man kann aber auch die Werthe P', P'', P''' ꝛc. durch noch einfachere Formeln, als die vorhergehenden sind, auf folgende Art bestimmen. Es ist nemlich:

$(Q')^2 - P^\circ P' = (\mu A + \frac{1}{2} B)^2 - A(\mu^2 A + \mu B + C)$
$= \frac{1}{4} B^2 - AC;$

$(Q'')^2 - P' P'' = (\mu' P' + Q')^2 - P'[(\mu')^2 P' + 2\mu' Q' + A]$
$= (Q')^2 - AP' = \frac{1}{4} E$ u. s. w.

Mithin ist

$$(Q')^2 - P^\circ P' = \tfrac{1}{4} E.$$
$$(Q'')^2 - P' P'' = \tfrac{1}{4} E.$$
$$(Q''')^2 - P'' P''' = \tfrac{1}{4} E \text{ &c.}$$

woraus $P' = \dfrac{(Q')^2 - \frac{1}{4} E}{P^\circ}$

$$P'' = \frac{(Q'')^2 - \frac{1}{4} E}{P'}$$

P'''

$$P''' = \frac{(Q''')^2 - \frac{1}{4}E}{P''} \quad \&c.$$

Nachdem nun die Zalen μ, μ' μ'' ꝛc. auf dieſe Art gefunden worden, ſo iſt, nach §. 26, der fortlaufende Bruch

$$a = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \&c.}}$$

Um daher das Minimum der Formel $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ zu finden, müſſen die Zalen p°, p', p'' ꝛc. und q°, q', q'' ꝛc. (§. 25.) berechnet, und nach und nach ſtatt p und q geſezt werden. Man kann aber dieſe Operation auch ganz unterlaſſen; denn P°, P', P'', P''' ꝛc. ſind nichts anders, als die Werthe der Formeln ſelbſt, von denen hier die Rede iſt *), wenn nach und nach $p = p^\circ$, p', p'', p''' ꝛc. und $q = q^\circ$, q', q'', q''' ꝛc. geſezt wird. Man muß alſo ſehen, welches Glied der Reihe P°, P', P'' ꝛc. das kleinſte iſt, diß wird ſodann auch das geſuchte Minimum ſeyn. Die correſpondirenden Werthe von p und q finden ſich ſodann aus den oben angeführten Formeln.

*) $Ap^2 + Bpq + Cq^2 = A(p - aq)(p - bq)$ wenn a und b die zwei wirklichen Wurzeln der Gleichung ſind. (§. 28.) Sind nun p und $q = p^\circ$ und q°, ſo iſt dieſer Werth $= A(p^\circ - aq^\circ)(p^\circ - bq^\circ) = A = P^\circ$. Nimmt man aber ſtatt p und q, die Werthe p' und q', ſo iſt eben dieſer Werth $= A(aq' - p')(bq' - p') = A(p')^2 + Bp'q' + C(q')^2 = P'$. und ſo die übrigen.

Anm. d. Ueb.

§. 34.

Wenn aber die Reihe P°, P', P'' ꝛc. fortgesezt wird, so behaupte ich, man werde nothwendig auf zwei auf einander folgende Glieder, die verschiedene Zeichen haben, kommen, und, von diesen an werden sodann alle folgende Glieder abwechslungsweise verschiedene Zeichen haben,. Denn, nach dem vorhergehenden §. ist $P^\circ = A\,(p^\circ - aq^\circ)\,(p^\circ - bq^\circ)$; $P' = A\,(p' - aq)\,(p' - bq')$ ꝛc. aber aus dem, was wir im zweiten Problem bewiesen haben, folgt, daß die Grössen $p^\circ - aq^\circ$; $p' - aq'$; $p'' - aq''$ ꝛc. abwechselnde Zeichen haben, und immer kleiner werden. Wenn also

1) die Grösse b verneint ist, so werden die Grössen $p^\circ - bq^\circ$, $p' - bq'$ ꝛc. alle bejaht; folglich müssen sodann in P°, P', P'' ꝛc. die Zeichen abwechseln.

2) Wenn b bejaht ist, so muß man, da $p' - aq'$, $p' - aq''$ ꝛc. und also auch um so mehr $\frac{p'}{q'} - a$; $\frac{p''}{q''} - a$ ꝛc. eine ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, nothwendig auf eine dieser leztern Grössen kommen, wie z. B. $\frac{p'''}{q'''} - a$, welche $< a - b$ seyn wird; (ich abstrahire nemlich von den Zeichen), und dann werden auch alle folgende, als $\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - a$; $\frac{p^V}{q^V} - a$ ꝛc. es ebenfalls seyn; so daß also alle Grössen, wie $a - b + \frac{p'''}{q'''} - a$, $a - b + \frac{p^{IV}}{q^{IV}} - a$ ꝛc. nothwendig eben dasselbe

Zeichen

Zeichen haben werden, wie a − b *). Folglich haben die Gröſſen $\frac{p'''}{q'''} - b$, $\frac{p^{IV}}{q^{IV}} - b$ ꝛc. und dieſe $p''' - bq'''$, $p^{IV} - bp^{IV}$ und ſo fort ins Unendliche einerlei Zeichen; folglich haben P^{III}, P^{IV} ꝛc. abwechſelnde Zeichen.

Wir wollen daher annehmen, in der Reihe P', P'', P''' ꝛc. ſey das Glied P^{λ} das erſte, bei welchem dieſe Abwechslung der Zeichen anfängt, ſo daß alle Glieder P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$ &c. bis ins Unendliche abwechſelnd bejaht und verneint ſind, ſo behaupte ich, daß keines dieſer Glieder gröſſer, als E ſeyn könne. Denn da z. B. P^{III}, P^{IV}, P^{V} &c.

*) Denn entweder iſt a − b bejaht, oder verneint. Im erſten Fall muß $a - b + \frac{p'''}{q'''} - a$ immer bejaht ſeyn, wenn $\frac{p'''}{q'''} - a$ kleiner als a − b angenommen wird; denn wenn auch gleich $\frac{p'''}{q'''} - a$ verneint wäre, ſo müßte in der angenommenen Vorausſetzung immer ein bejahter Reſt übrig bleiben.

Iſt aber a − b verneint, ſo muß auch $a - b + \frac{p'''}{q'''} - a$ verneint ſeyn, weil, wenn $\frac{p'''}{q'''} - a$ auch gleich bejaht wäre, der Ueberreſt doch immer auf Seiten der gröſſeren Zal a − b, und mithin verneint ſeyn müßte.

Anm. d. Ueb.

abwechſelnde Zeichen haben, ſo iſt klar, daß die Produkte von je zwei aufeinander folgenden Gliedern P^{III} P^{IV}, P^{IV}, P^{V} ꝛc. verneint ſeyn müſſen; aber nach dem vorhergehenden §. iſt $(Q^{IV})^2 - P^{III}\ P^{IV} = E$; $(Q^{V})^2 - P^{IV}\ P^{V} = E$ ꝛc. folglich werden die bejahten Zalen $- P^{IV}\ P^{V}$, $- P^{IV}\ P^{V}$ ꝛc. alle kleiner, oder wenigſtens nicht gröſſer als E ſeyn. Da nun P', P'', P''' ꝛc. ihrer Natur nach ganze Zalen ſind; ſo können die Zalen P^{III}, P^{IV} ꝛc. und überhaupt P^{λ}, $P^{\lambda+1}$ ꝛc. (wenn man von dem Zeichen abſtrahirt,) niemals gröſſer als E ſeyn. Hieraus folgt nun ferner, daß die Glieder Q^{IV}, Q^{V} ꝛc. und überhaupt Q^{λ}, $Q^{\lambda+1}$ ꝛc. nie gröſſer werden können, als γ E.

Es iſt alſo aus dem bisherigen leicht zu ſchlieſſen, daß die zwei Reihen, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$ ꝛc. und $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$ ꝛc. obſchon ins Unendliche fortgeſezt, doch nur aus einer gewiſſen Anzal von verſchiedenen Gliedern beſtehen werden; denn dieſe Glieder können für die erſtere Reihe keine andre ſeyn, als die natürliche Zalen bis E, bejaht oder verneint genommen, und für die zweite, die natürliche Zalen bis γ E, mit den dazwiſchen fallenden Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ ꝛc. ebenfalls bejaht, oder verneint genommen; indem nach dem vorhergehenden §. die Zalen Q', Q'', Q''' ꝛc. immer ganze Zalen ſind, wenn B gerade iſt, aber jede den Bruch $\frac{1}{2}$ enthalten wird, wenn B ungerad iſt.

Wenn man daher die beiden Reihen P', P'', P''' ꝛc. Q', Q'', Q''' ꝛc. fortſezt, ſo müſſen nothwendig nach einer gewiſſen Anzal von Zwiſchengliedern zwei correſpondirende Glieder, wie P^{π}, Q^{π} wieder zum Vorſchein

schein kommen. Diese Anzal von Zwischengliedern kann aber immer als gerade betrachtet werden; denn da dieselben Glieder P^{π} und Q^{π} zu gleicher Zeit unzäligemal wieder zum Vorschein kommen, indem die Anzal der verschiednen Glieder bei beiden Reihen und mithin auch die Anzal ihrer Kombinationen auf bestimmte Gränzen eingeschränkt ist, so ist klar, daß wenn jene beiden Glieder nach einer ungeraden Anzal von Zwischengliedern zum Vorschein kämen, man nur je zwei und zwei Rükkehrungen derselben betrachten dürfte, und dann würden alle Intervalle aus einer geraden Anzal von Gliedern bestehen.

Wenn demnach 2ϱ die Anzal dieser Zwischenglieder bezeichnet, so ist $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$; $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$ und dann werden alle Glieder P^{π}; $P^{\pi+1}$; $P^{\pi+2}$ ꝛc. und Q^{π}, $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$ ꝛc. und μ^{π}, $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$ ꝛc. jedes nach 2ϱ dazwischen liegenden, wieder zum Vorschein kommen. Denn es ist leicht, aus denen im vorhergehenden §. für μ', μ'', μ''' ꝛc. wie auch für Q', Q'', Q''' ꝛc. und P', P'', P''' ꝛc. bestimmten Werthen, zu sehen, daß, nach dem $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$ und $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$ erhalten worden, auch $\mu^{\pi+2\varrho} = \mu^{\pi}$ und nachher $Q^{\pi+2\varrho+1} = Q^{\pi+1}$ und $P^{\pi+2\varrho+1} = P^{\pi+1}$, also auch $\mu^{\pi+2\varrho+1} = \mu^{\pi+1}$ seyn müsse, u. s. w.

Wenn daher Π eine Zal bedeutet, die entweder $= \pi$ oder $> \pi$, und überdiß m irgend eine beliebige ganze bejahte Zal ist, so wird überhaupt

$P^{\Pi+2m\varrho} = P^{\Pi}$; $Q^{\Pi+2m\varrho} = Q^{\Pi}$ $\mu^{\Pi+2m\varrho} = \pi^{\Pi}$ seyn. Wenn man aber die $\pi+2\varrho$ ersten Glieder dieser drei Reihen kennt, so weiß man auch alle folgende, welche nichts anders seyn werden, als die 2ϱ lezten in ebenderselben Ordnung ins Unendliche wiederholt.

Aus dem bisherigen folgt, daß man, um den kleinsten Werth von $P = Ap^2 + Bpq + Cq^2$ zu finden, die Reihen P^0, P^I, P^{II}, P^{III} ꝛc. und Q^0, Q^I, Q^{II}, Q^{III} ꝛc. nur so weit fortsetzen darf, bis zwei correspondirende Glieder, wie P^{π} und Q^{π} zugleich, nach einer geraden Anzal von Zwischengliedern erhalten werden, so daß $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$, und $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$ ist, und dann wird das kleinste Glied der Reihe P^0, P^I, P^{II}, P^{III} ꝛc. $P^{\pi+2\varrho}$ das gesuchte Minimum seyn.

1. Zusaz.

§. 35.

Wenn das kleinste Glied der Reihe P^0, P^I, P^{II} ꝛc. $P^{\pi+2\varrho}$ nicht vor dem Gliede P^{π} gefunden wird, so kommt dasselbe in jener ins Unendliche fortlaufenden Reihe mehreremal vor, und es finden sich daher in diesem Fall eine unzälige Menge von Werthen für p und q, die ein Kleinstes geben, und durch die Formeln des §. 25., vermittelst bloßer Wiederholung ebenderselben Glieder $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$ ꝛc. der über das Glied $\mu^{2\varrho+\pi}$ hinaus fortgesezten Reihe μ^I, μ^{II}, μ^{III} ꝛc. erhalten werden, wie bereits oben gezeigt worden ist. Es lassen sich zwar auch allgemeine

Formeln

Formeln für p und q finden; allein da dieſes nicht ohne Weitläufigkeit hier gezeigt werden könnte; ſo verweiſe ich den Leſer auf die ſchon einigemal angeführten Berliner Denkwürdigkeiten vom Jahr 1768, S. 123 ꝛc.; wo eine allgemeine und neue Theorie der fortlaufenden periodiſchen Brüche vorkommt.

2. Zuſaz.

§. 36.

Es iſt §. 34. gezeigt worden, daß, wenn die Reihe P', P'', P''' ꝛc. fortgeſezt wird, man nothwendig auf zwei aufeinander folgende Glieder von verſchiedenen Zeichen kommen müſſe. Wir wollen alſo annehmen, P^{III} und P^{IV} ſeyen die erſten, denen dieſe Eigenſchaft zukommt; ſo müſſen die beiden Gröſſen $p^{III} - bq^{III}$ und $p^{IV} - bq^{IV}$ nothwendig einerlei Zeichen haben, weil die Gröſſen $p^{III} - aq^{III}$ und $p^{IV} - aq^{IV}$ ihrer Natur nach verſchiedne Zeichen haben *). Wenn man aber in den Ausdrücken $p^{V} - bq^{V}$, $p^{VI} - bq^{VI}$ ꝛc. nach §. 25. die Werthe für p^{V}, p^{VI} ꝛc. und für q^{V}, q^{VI} ꝛc. ſezt, ſo findet ſich

$$p^{V} - bq^{V} = \mu^{IV}(p^{IV} - bq^{IV}) + p^{III} - bq^{III}$$
$$p^{VI} - bq^{VI} = \mu^{V}(p^{V} - bq^{V}) + p^{IV} - bq^{IV} \text{ ꝛc.}$$

woraus erhellet, daß, da μ^{IV}, μ^{V} ꝛc. lauter bejahte Zalen ſind, die Gröſſen $p^{V} - bq^{V}$, $p^{VI} - bq^{VI}$ ꝛc. bis

*) Da $P''' = A(p''' - aq''')(p''' - bq''')$ und $P^{IV} = A(p^{IV} - aq^{IV})(p^{IV} - bq^{IV})$ und P^{III}. P^{IV}, nach der Vorausſetzung verneint iſt, ſo müſſen nothwendig die Gröſſen $p^{III} - bq^{III}$ und $p^{IV} - bq^{IV}$ entweder beide bejaht oder beide verneint ſeyn, weil jenes Produkt ſonſt nicht verneint ſeyn könnte.

Anm. d. Ueb.

ins Unendliche eben dieselben Zeichen haben müssen, als die Grössen $p^{III} - bq^{III}$ und $p^{IV} - bq^{IV}$; folglich sind auch alle Glieder P^{III}, P^{IV}, P^{V} ꝛc. ins Unendliche abwechslungsweise bejaht und verneint.

Nach den vorhergehenden Gleichungen ist

$$\mu^{IV} = \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}} - \frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}}$$

$$\mu^{V} = \frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}} - \frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$$

$$\mu^{VI} = \frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}} - \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{VI} - bq^{VI}} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

wo die Grössen $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, $\frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$ ꝛc. alle bejaht seyn werden.

Weil demnach, nach der Voraussetzung, die Zalen μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI} ꝛc. alle ganz und bejaht seyn müssen, so muß die Grösse $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, so wie auch $\frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$ und $\frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}$ ꝛc. bejaht und grösser als 1 und mithin $\frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$, $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{VI} - bq^{VI}}$ ꝛc. bejaht, und kleiner als die Einheit seyn: Die Grössen μ^{V}, μ^{VI} ꝛc. können also keine andere, als diejenigen ganzen Zalen seyn, die unmittelbar kleiner sind, als die Werthe $\frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$, $\frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}$ ꝛc. Was aber den Werth

von

von μ^{IV} anbetrift, ſo iſt derſelbe ebenfalls diejenige ganze Zal, die unmittelbar kleiner, als $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}}$ iſt, wenn $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}} < 1$. iſt. Man hat alſo

$\mu^{IV} < \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, wenn $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}} < 1.$

$\mu^{V} < \frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$

$\mu^{VI} < \frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}$ ꝛc.

wo übrigens, wie oben geſagt worden, das nach μ^{III}, μ^{IV}, μ^{V} ꝛc. ſtehende Zeichen $<$ diejenigen ganzen Zalen bedeutet, die unmittelbar kleiner ſind, als die nach demſelben folgenden Ausdrücke.

Es iſt aber leicht, durch ähnliche Reduktionen wie §. 33., die Gröſſen $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, $\frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$ ꝛc. in $\frac{Q^{V} + \frac{1}{2}\gamma E}{P^{IV}}$, $\frac{Q^{VI} - \frac{1}{2}\gamma E}{P^{V}}$ ꝛc. zu verwandeln.

Ueberdiß iſt die Bedingung, daß $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}} < 1$ ſeyn muß, vollkommen einerlei mit dieſer $\frac{p^{III}}{p^{IV}} < \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{IV} - aq^{IV}}$, welche demnach, da $\frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{IV} - aq^{IV}} < 1,$

< 1, immer ſtatt finden wird, wenn $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} =$ oder < 1 iſt *).

Es iſt alſo

$$\mu^{IV} < \frac{Q^{V} + \frac{1}{2}\gamma E}{P^{IV}}, \text{ wenn } -\frac{P^{III}}{P^{IV}} = \text{ oder } < 1.$$

$$\mu^{V} < \frac{Q^{VI} - \frac{1}{2}\gamma E}{P^{V}}$$

$$\mu^{VI} < \frac{Q^{VII} + \frac{1}{2}\gamma E}{P^{VI}} \quad \&c. \quad \&c.$$

Wenn man dieſe Formeln mit denjenigen des §. 33. welche das Geſez der Reihen P', P'', P''' ꝛc. und Q' Q'', Q''' ꝛc. enthalten, vergleicht, ſo wird man leicht ſehen, daß, wenn zwei correſpondirende Glieder dieſer

*) Es iſt $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} = \left(\frac{P^{III} - bq^{III}}{P^{IV} - bq^{IV}}\right) \cdot \left(\frac{aq^{III} - P^{III}}{P^{IV} - aq^{IV}}\right)$

wenn daher $\frac{P^{III} - bq^{III}}{P^{IV} - bq^{IV}} < 1$ iſt, ſo muß alſo $-\frac{P^{III}}{P^{IV}}$ einem Theile von $\frac{aq^{III} - P^{III}}{P^{IV} - aq^{IV}}$ gleich ſeyn, folglich $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} < \frac{a^{III} - qp^{III}}{P^{IV} - aq^{IV}}$. Aber $\frac{aq^{III} - P^{III}}{P^{IV} - aq^{IV}}$ iſt > 1. folglich iſt die Bedingung $\frac{P^{III} - bq^{III}}{P^{IV} - bq^{IV}} < 1$ einerlei mit dieſer $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} =$ oder < 1.

Anm. d. Ueb.

dieſer beiden Reihen, deren Zal gröſſer als 3 iſt, als bekannt angenommen werden, man auf die vorhergehenden Glieder bis auf P^{IV} und Q^{V}, und, wenn die Bedingung $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} =$ oder < 1 ſtatt findet, bis auf P^{III} und Q^{IV} zurükgehen kann, und daß mithin alle dieſe Glieder durch diejenigen beſtimmt ſind, die man als gegeben annahm.

In der That, wenn z. B. P^{VI} und Q^{VI} als bekannt angenommen werden, ſo ergibt ſich zuerſt P^{V} aus der Gleichung $(Q^{VI})^2 - P^{V}.P^{VI} = \frac{1}{2}E$; ſodann aus Q^{VI} und P^{V} der Werth von μ^{V}, hieraus ſofort Q^{V} durch die Gleichung $Q^{VI} = \mu^{V} P^{VI} + Q^{V}$. Ferner gibt die Gleichung $(Q^{V})^2 - P^{IV}.P^{V} = \frac{1}{4}E$ den Werth von P^{IV}, und wenn voraus bekannt iſt, daß $-\frac{P^{III}}{P^{IV}} =$ oder < 1. ſeyn muß, ſo findet ſich alsdann μ^{IV}, und aus dieſem Q^{V}, aus der Gleichung $Q^{V} = \mu^{IV} P^{IV} + Q^{IV}$, und endlich P^{III} aus $(Q^{IV})^2 - P^{III}.P^{IV} = \frac{1}{4}E$.

Hieraus kann man leicht den allgemeinen Schluß ziehen: Wenn P^{λ} und $P^{\lambda+1}$ die erſten aufeinander folgenden Glieder der Reihen P', P'', P''' ꝛc. ſind, welche verſchiedene Zeichen haben, ſo wird ſowol das Glied $P^{\lambda+1}$ als die folgenden, nach einer gewiſſen Anzal von Zwiſchengliedern, immer zum Vorſchein kommen, und auch das Glied P^{λ}, wann $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ oder < 1 iſt.

Denn

Denn wenn wir annehmen, es sey, (wie §. 34.) $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$ und $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$ gefunden worden, und π sey überdiß $> \lambda$, nemlich $\pi = \lambda + \nu$ so kan man einerseits von dem Gliede P^{π} zu $P^{\lambda+1}$ oder P^{λ} und andrerseits von $P^{\pi+2\varrho}$ zu $P^{\lambda+2\varrho+1}$ oder $P^{\lambda+2\varrho}$ hinaufsteigen; und da die Glieder, von denen man beiderseits ausgeht, gleich sind, so werden auch alle übrige, die aus ihnen entspringen, respective gleich seyn, so daß also $P^{\lambda+2\varrho+1} = P^{\lambda+1}$ und im Fall $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ oder < 1, auch $P^{\lambda+2\varrho} = P^{\lambda}$.

Hieraus kann man also einigermassen auf die Perioden in der Reihe P^{0}, P', P'', P''' ꝛc. und folglich auch in den beiden andern Reihen Q^{0}, Q', Q'', Q''' ꝛc. und μ, μ', μ'', μ''' ꝛc. schliessen. Was aber die Länge derselben anbetrift, so hängt sie von der Beschaffenheit von E, und zwar einzig und allein von dem Werthe dieser Zal ab, wie ich erweisen könnte, wenn ich nicht befürchtete, allzuweitläufig zu werden.

3. Zusaz.

§. 37.

Was im vorhergehenden §. bewiesen worden ist, kann auch auf folgenden schönen Lehrsaz angewandt werden:

Jede

Jede Gleichung von der Geſtalt $p^2 - Kq^2 = 1$, wo K eine ganze bejahte Zal, die keine Quadratzal iſt, bedeutet, und p und q unbeſtimmte Gröſſen ſind, kann immer in ganzen Zalen aufgelöſt werden. Denn wenn man $p^2 - Kq^2$ mit der allgemeinen Formel $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ vergleicht, ſo ergibt ſich $A = 1$, $B = 0$, $C = -K$; mithin $E = B^2 - 4AC = 4K$ und $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}$. (§. 33.) Folglich $P^0 = 1$, $Q^0 = 0$, alſo $\mu < \sqrt{K}$; $Q^1 = \mu$ und $P^1 = \mu^2 - K$; woraus erhellet, daß 1) P^1 verneint iſt, und folglich mit P^0 verſchiedne Zeichen hat. 2) Daß $-P^1 =$ oder > 1 iſt, weil K und μ ganze Zalen ſind; ſo daß alſo $\frac{P^0}{-P^1} =$ oder < 1; folglich iſt, nach dem vorhergehenden §. $\lambda = 0$, und $P^{2\varrho} = P^0 = 1$; ſo daß wenn man alſo die Reihe P^0, P', P'' ꝛc. fortſezt, das Glied $P^0 = 1$ nothwendig nach einer gewiſſen Anzal von Zwiſchengliedern wieder zum Vorſchein kommen muß; folglich laſſen ſich immer eine unzälige Menge von Werthen für p und q finden, welche die Formel $p^2 - Kq^2$ der Einheit gleich machen *).

4. Zuſaz.

*) Um das bisherige durch ein Beiſpiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es ſoll $1 + 97q^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden. Man ſetze alſo $1 + 97q^2 = p^2$ ſo muß $p^2 - 97q^2 = 1$, ſeyn. Vergleicht man nun dieſe Formel mit der allgemeinen $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, ſo iſt hier: $A = 1$, $B = 0$. und $C = -97$: folglich $E = B^2 - 4AC = 4.97$ alſo $\frac{1}{4}E = 97$ und $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{97}$. Ferner iſt $Q^0 = \frac{1}{2}B = 0$ und $P^0 = A = 1$. Man ſtelle alſo nach den Formeln

$Q^0 =$

4. Zuſaz.

§. 38.

Man kann auch folgenden Lehrſaz beweiſen: Wenn die Gleichung $p^2 - Kq^2 = \pm H$ in ganzen Zalen ſoll aufgelöſt werden können, (wo übrigens K keine Quadratzal, und H bejaht, und kleiner als $\sqrt{K}$ iſt), ſo müſſen die Zalen p und q ſo ſeyn, daß $\frac{p}{q}$ einer von denjenigen Hauptbrüchen iſt, die ſich dem Werthe $\sqrt{K}$ nähern.

Wir wollen zuerſt annehmen, daß das obere Zeichen ſtatt finde, und alſo $p^2 - Kq^2 = H$ ſey; alſo iſt

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p + q\sqrt{K}}$$

$$\text{und } \frac{p}{q} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$$

Man ſuche nun zwei ganze bejahte Zalen r und ſ, die kleiner als p und q, und zugleich ſo ſind, daß $ps - qr = 1$. welches (nach §. 23.) immer möglich iſt, ſo wird $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{1}{qs}$; zieht man dieſe Gleichung von der

$$Q^\circ = \tfrac{1}{2}B, \quad P^\circ = A, \quad \mu < -\frac{Q^\circ + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^\circ}$$

$$Q' = \mu P^\circ + Q^\circ; \; P' = \frac{(Q^\beta)^2 - \frac{1}{4}E}{P^\circ}; \; \mu' < -\frac{Q' - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P'}$$

&c. &c.

folgende Berechnung an:

$Q^\circ = 0.$

Q°	$=$	0		$P^{\circ} =$	1	$\mu \quad < \quad \nu\ 97 = 9$
Q^{I}	$=$	$1,\ 9 + 0 = 9$		$P^{I} =$	$\frac{9^2 - 97}{1} = -16$	$\mu^{I} \quad < \quad \frac{-9-9}{-16} = 1$
Q^{II}	$=$	$-1,\ 16+9 = -7$		$P^{II} =$	$\frac{7^2 - 97}{-16} = 3$	$\mu^{II} \quad < \quad \frac{7+9}{3} = 5$
Q^{III}	$=$	$5,\ 3-7 = 8$		$P^{III} =$	$\frac{8^2 - 97}{3} = -11$	$\mu^{III} \quad < \quad \frac{-8-9}{-11} = 1$
Q^{IV}	$=$	$-1,\ 11+8 = -3$		$P^{IV} =$	$\frac{3^2 - 97}{-11} = 8$	$\mu^{IV} \quad < \quad \frac{3+9}{8} = 1$
Q^{V}	$=$	$1,\ 8-3 = 5$		$P^{V} =$	$\frac{5^2 - 97}{8} = -9$	$\mu^{V} \quad < \quad \frac{-5-9}{-9} = 1$
Q^{VI}	$=$	$-1,\ 9+5 = -4$		$P^{VI} =$	$\frac{4^2 - 97}{-9} = 9$	$\mu^{VI} \quad < \quad \frac{4+9}{9} = 1$

Bayerische Staatsbibliothek München

$$\mu^{VII} < \frac{-5-9}{-8} = 1 \qquad P^{VII} = \frac{5^2-97}{9} = -8 \qquad Q^{VII} = 1,9-4 = 5$$

$$\mu^{VIII} < \frac{3+9}{11} = 1 \qquad Q^{VIII} = \frac{3^2-97}{-8} = 11 \qquad Q^{VIII} = -1,8+5 = -3$$

$$\mu^{IX} < \frac{-8-9}{-3} = 5 \qquad P^{IX} = \frac{8^2-97}{11} = -3 \qquad Q^{IX} = 1,11-3 = 8$$

$$\mu^{X} < \frac{7+9}{16} = 1 \qquad P^{X} = \frac{7^2-97}{-3} = 16 \qquad Q^{X} = -3,5+8 = -7$$

$$\mu^{XI} < \frac{-9-9}{-1} = 18 \qquad P^{XI} = \frac{9^2-97}{16} = -1 \qquad Q^{XI} = 1,16-7 = 9$$

$$\mu^{XII} < \frac{9+9}{16} = 1 \qquad P^{XII} = \frac{9^2-97}{-1} = 16 \qquad Q^{XII} = -1,18+9 = -9$$

der vorhergehenden ab, so ist

$$\frac{r}{s} - \gamma K = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \gamma K\right)} + \frac{1}{qs}$$

$$= \frac{G}{\quad} \quad \text{so}$$

Da nun hier $P^{XII} = \frac{p}{\quad} - 1$ ist, so ist es nicht nöthig, die Rechnung weiter fortzusetzen; weil für P^{XIII}, P^{XIV} ꝛc. eben die Werthe wie für P', P'' ꝛc. nur mit verkehrten Zeichen zum Vorschein kommen, und man also, um auf $P^{\lambda} = +1$ zu kommen, nur die bereits berechneten, nebst den, ihnen zugehörigen Werthen von μ, μ' ꝛc. nehmen darf. Nun muß man bis auf die Werthe von p und q rükwärts gehen, welches entweder durch die §. 25. gegebenen Formeln, oder noch leichter, vermittelst der bei den fortlaufenden Brüchen erklärten Methode auf folgende Art geschehen kann.

	I	o
9	o	I
I	I	9
5	I	I0
I	6	59
I	7	69
I	I3	I28
I	20	I97
I	33	325
I	53	522
5	86	847
I	483	4757
I8	569	5604
I	I0725	I05629
5	II294	III233

so daß also $p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$

$$s - f\sqrt{K} = \frac{1}{q}\left\{\frac{fH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - 1\right\}$$

da

1	67195	661794
1	78489	773027
1	145684	1434821
1	224173	2207848
1	369857	3642669
1	594030	5850517
5	963887	9493186
1	5413465	53316447
18	6377352	62809633

Mithin ist in $p^2 = 1 + 97q^2$, $q = 62809633$ und $p = 6377352$, welches zugleich die kleinsten Werthe in ganzen Zalen sind.

In dem XIten Bande der neuen Petersburger Commentare gibt Euler ebenfalls eine allgemeine Auflösung dieses Problems, die sehr sinnreich und bei weitem kürzer ist, als die Pellische Methode. Indessen aber behauptet dennoch die hier vorgetragene des De la Grange, sowol in Absicht auf die Vollständigkeit der Sätze, auf welche sie gebaut ist, als auch besonders wegen der grossen Einfachheit der Rechnungen, die sie erfordert, immerhin den Vorzug, und läßt, was dieses so merkwürdige Problem betrift, nichts mehr zu wünschen übrig. A. d. Ueb.

da aber $\frac{p}{q} > \gamma K$ *), und $H < \gamma K$; ſo muß

$\frac{H}{\frac{p}{q} + \gamma K} < \frac{1}{2}$ ſeyn. Es iſt demnach $p - q\gamma K < \frac{1}{2q}$

alſo $\frac{\int H}{q\left(\frac{p}{q} + \gamma K\right)}$ um ſo mehr $< \frac{1}{2}$, weil $\int < q$

iſt: folglich iſt der Ausdruk $r - \int \gamma K$ verneint, aber bejaht genommen, iſt derſelbe $> \frac{1}{2q}$,

weil $1 - \frac{\int H}{q\left(\frac{p}{q} + \gamma K\right)} > \frac{1}{2}$.

Man hat demnach die zwei Gröſſen $p - q\gamma K$ und $r - \int \gamma K$, oder wenn $a = \gamma K$ geſezt wird, $p - aq$ und $r - a\int$, welche eben denſelben Bedingungen unterworfen ſind, die wir §. 24. vorausſezten, folglich ꝛc. §. (26.) Wäre aber $p^2 - Kq^2 = -H$, ſo müßte man ſolche Werthe für r und ſ ſuchen, daß $p\int - qr = -1$, und man erhielte demnach dieſe zwei Gleichungen

$q\gamma K - p = \frac{H}{q\left(\gamma K + \frac{p}{q}\right)}$

$\int \gamma K$

*) Da $p^2 - Kq^2 = H$, ſo iſt $\frac{p}{q} = \gamma\left(K + \frac{H}{q^2}\right)$,

alſo $\frac{p}{q} > \gamma K$.

$$\int \sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left\{\frac{\int H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)} - 1\right\}$$

Da aber $H < \sqrt{K}$, und $\int < q$, ſo muß $\frac{\int H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)} < 1$ ſeyn; ſo daß alſo die Gröſſe $\int \sqrt{K} - r$ verneint iſt. Aber eben dieſe Gröſſe, bejaht genommen, iſt gröſſer als $q\sqrt{K} - p$. Um diß zu beweiſen, muß gezeigt werden, daß

$$\frac{1}{q}\left\{1 - \frac{\int H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}\right\} > \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}$$

oder daß $1 > \frac{H\left(1 + \frac{\int}{q}\right)}{\sqrt{K} + \frac{p}{q}}$, das iſt, daß $\sqrt{K} + \frac{p}{q} > H + \frac{\int H}{q}$.

Aber nach der angenommenen Vorausſetzung iſt $\sqrt{K} > H$, alſo bleibt noch zu erweiſen, daß $\frac{p}{q} > \left(\frac{\int H}{q}\right)$, oder $p > \int H$. Nun iſt aber $\int \sqrt{K} - r$ verneint, alſo muß $r > \int \sqrt{K}$ ſeyn, folglich auch um ſo mehr p, das gröſſer als r iſt, $> \int \sqrt{K}$, alſo auch gröſſer als $\int H$. Alſo

Alſo haben $p - q\sqrt{K}$ und $r - f\sqrt{K}$ verſchiedene Zeichen, und überdiß (wenn man von den Zeichen abſtrahirt), iſt die zweite gröſſer als die erſte, wie im vorhergehenden Fall. Folglich ꝛc.

Wenn alſo eine Gleichung von der Form $p - Kq^2 = \pm H$. (wo $H < \sqrt{K}$ iſt) in ganzen Zalen aufgelöſt werden ſolle, ſo ſind eben dieſelben Operationen zu machen, wie §. 33.; wobei alſo $A = 1$, $B = 0$ und $C = -K$ geſezt wird. Findet ſich nun in der Reihe P^0, P', P'', P''' ꝛc. $P^{\pi+2\varrho}$ ein Glied $= \pm H$, ſo iſt die Frage aufgelöst, wo nicht, ſo gibt es für ſolchen Fall keine Auflöſung in ganzen Zalen.

Anmerkung.

§. 39.

Wir haben §. 33. in $A\lambda^2 + B\lambda + C$ nur eine Wurzel betrachtet, und dieſelbe bejaht angenommen: Sollten nun aber in dieſer Gleichung beide Wurzeln bejaht ſeyn, ſo muß man ſie, eine nach der andern, ſtatt a ſetzen, und bei beiden eben dieſelbe Operation vornehmen; Wäre aber eine derſelben, oder gar alle beide verneint, ſo müſſen ſie erſtlich dadurch in bejahte Zalen verwandelt werden, daß man erſtens das Zeichen von B verändert, übrigens aber wie oben verfährt, und nachher zweitens den Werthen von p und q verſchiedene Zeichen gibt, nemlich dem einen plus, dem andern minus (§. 29.) Im allgemeinen hat alſo B beide Zeichen $\pm$, und ſo auch $\sqrt{E}$, das iſt: es wird $Q^0 = \mp\frac{1}{2}B$, und $\sqrt{E} = \pm\sqrt{E}$ ſeyn. Nur müſſen dieſe Zeichen ſo genommen werden, daß die Wurzel $a = \frac{\mp\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$ bejaht ſey, welches

immer auf zweierlei Art geschehen kann. Das obere Zeichen von B wird die bejahte Wurzel bedeuten, in welchem Falle p und q einerlei Zeichen haben müssen, im Gegentheil aber ist das Zeichen von B für die verneinte Wurzel, in welchem Fall die Zeichen p und q verschieden sind.

Beispiel.

§. 40.

Man sucht diejenigen ganzen Zalen für p und q, daß $9p^2 - 118pq + 378q^2$ so klein, als möglich werde.

Wenn man diese Formel mit der allgemeinen Formel der dritten Aufgabe vergleicht, so ergibt sich $A = 9$, $B = -118$, $C = 378$. also $B^2 - 4AC = 316$; woraus zu ersehen, daß dieser Fall sich auf §. 33. bezieht; Es sey also $E = 316$, und mithin $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{79}$; und da $\sqrt{79} > 9$ ist, so läßt sich anstatt der Wurzelgrösse $\sqrt{79}$ entweder 8 oder 9 annehmen. Indessen gebe man sowol B als $\sqrt{E}$ das doppelte Zeichen + und —, und nehme hernach diese Zeichen also, daß $a = \frac{\pm 59 \mp \sqrt{79}}{9}$ bejaht sey, (§. 39.). In diesem Falle muß man also für 59 immer das obere Zeichen nehmen; die Wurzelgrösse $\sqrt{79}$ aber kann sowol + als — haben. Es sey demnach immer $Q° = -\frac{1}{2}B$; $\sqrt{E}$ aber sowol bejaht, als verneint. Laßt uns nun 1) $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{79}$ bejaht annehmen, und (nach §. 23.) folgende Rechnung anstellen:

$Q° =$

$$Q^{\circ} = -59 \qquad P^{\circ} = \qquad 9 \qquad \mu \qquad < \frac{59+\gamma 79}{9} = 7$$

$$Q^{I} = 9 \cdot 7 - 59 = 4 \qquad P^{I} = \frac{16-79}{9} = -7 \qquad \mu^{I} \qquad <\!\!- \frac{4-\gamma 79}{-7} = 1$$

$$Q^{II} = -7 \cdot 1 + 4 = -3 \qquad P^{II} = \frac{9-79}{-7} = 10 \qquad \mu^{II} \qquad < \frac{3+\gamma 79}{10} = 1$$

$$Q^{III} = 10 \cdot 1 - 3 = 7 \qquad P^{III} = \frac{49-79}{10} = -3 \qquad \mu^{III} \qquad <\!\!- \frac{7-\gamma 79}{-3} = 5$$

$$Q^{IV} = -3 \cdot 5 + 7 = -8 \qquad P^{IV} = \frac{64-79}{-3} = 5 \qquad \mu^{IV} \qquad < \frac{8+\gamma 79}{5} = 3$$

$$Q^{V} = 5 \cdot 3 - 8 = 7 \qquad P^{V} = \frac{49-79}{5} = -6 \qquad \mu^{V} \qquad <\!\!- \frac{7-\gamma 79}{6} = 2$$

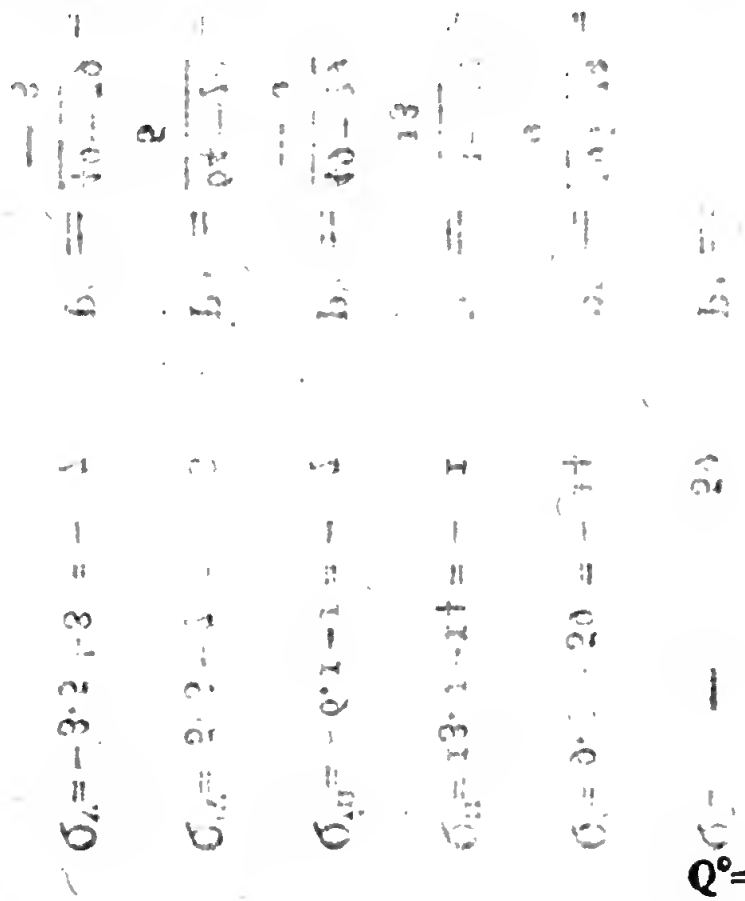
$$Q^{VI} = -6.2+7 = -5 \qquad P^{VI} = \frac{25-27}{-6} = 9 \qquad \mu^{VI} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1$$

$$Q^{VII} = 9.1-5 = 4 \qquad P^{VII} = \frac{16-79}{9} = -7 \qquad \mu^{VII} < \frac{4-\sqrt{79}}{-7} = 1$$

Weiter

Weiter setze ich die Rechnung nicht fort, weil $Q^{VII} = Q^{I}$ und $P^{VII} = P^{I}$, und der Unterschied 1 und 7 eine gerade Zal ist; woraus folgt, daß alle folgenden Glieder wiederum ebendieselben seyn werden, wie die vorhergehenden, so daß also $Q^{VII} = 4$, $Q^{VIII} = -\frac{1}{3}$, $Q^{IX} = 7$ ꝛc. $Q^{VII} = -7$, $P^{VIII} = 10$, $P^{IX} = -3$ ꝛc. und daher die oben angezeigte Reihe, durch bloße Wiederholung, nach Belieben ins Unendliche fortgesezt werden kann.

2°. Nun wollen wir $\sqrt{79}$ auch mit dem verneinten Zeichen nehmen, und dann wird die Rechnung diese seyn:



$Q^{\circ} =$

$$Q^{\circ} = -59 \qquad P^{\circ} = 9 \qquad \mu < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 3$$

$$Q^{I} = 9\cdot 5 - 59 = -14 \qquad P^{I} = \frac{196-79}{9} = 13 \qquad \mu^{I} < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1$$

$$Q^{II} = 13\cdot 1 - 14 = -1 \qquad P^{II} = \frac{1-79}{13} = -6 \qquad \mu^{II} < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1$$

$$Q^{III} = -6\cdot 1 - 1 = -7 \qquad P^{III} = \frac{49-79}{-6} = 5 \qquad \mu^{III} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3$$

$$Q^{IV} = 5\cdot 3 - 7 = 8 \qquad P^{IV} = \frac{64-79}{5} = -3 \qquad \mu^{IV} < \frac{-9-\sqrt{79}}{-3} = 5$$

$$Q^{V} = -3\cdot 5 + 8 = -7 \qquad P^{V} = \frac{49-79}{-3} = 10 \qquad \mu^{V} < \frac{7+\sqrt{97}}{10} = 1$$

$$\mu^{vi} = \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1 \qquad \mu^{vii} = \frac{-4+\sqrt{79}}{9} = 1 \qquad \mu^{viii} = \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2 \qquad \mu^{ix} = \frac{-7+\sqrt{79}}{5} = 3 \qquad \text{&c.}$$

$$p^{vi} = \frac{9-\sqrt{79}}{10} = 7 \qquad p^{vii} = \frac{10-\sqrt{79}}{-7} = 9 \qquad p^{viii} = \frac{25-\sqrt{75}}{9} = 6 \qquad p^{ix} = \frac{49-\sqrt{79}}{-6} = 5 \qquad \text{&c.}$$

$$Q^{vi} = 10.\ 1-7 = 3 \qquad Q^{vii} = -7.\ 1+3 = -4 \qquad Q^{viii} = 9.\ 1-4 = 5 \qquad Q^{ix} = -6.\ 2+5 = -7 \qquad \text{&c.}$$

Weiter

Weiter wäre es unnüz, die Reihe fortzusetzen, weil $Q^{IX} = Q^{III}$ und $P^{IX} = P^{III}$, und allerdiß der Unterschied von 9 und 3 gerade ist, und man also ebendieselben Glieder in ebenderselben Ordnung ins Unendliche wiederhohlt, wieder erhalten würde.

Wenn man aber die Werthe von P^{o}, P^{I}, P^{II} ꝛc. die in beiden Fällen gefunden werden, vergleicht, so findet sich, daß der kleinste derselben $= -3$ ist, und zwar im ersten Fall ist es das Glied P^{III}, dem die Werthe p''' und q''' correspondiren, in andern aber P^{IV}, dem p^{IV} und q^{IV} correspondiren.

Es folgt also hieraus, daß der kleinste Werth, dessen die gegebene Formel fähig ist, $= -3$ sey; um nun die correspondirenden Werthe von p und q zu bekommen, nehme man für den ersten Fall die Zalen μ, μ', μ'', d. i. 7, 1, 1, und mache daraus die convergirenden Hauptbrüche $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{15}{2}$, der dritte Bruch ist $\frac{p'''}{q'''}$, so daß also $p''' = 15$, und $q''' = 2$ ist; und diß sind daher die gesuchten Werthe für p und q. Im zweiten Falle nehme man die Zalen μ, μ', μ'', μ''', oder 5, 1, 1, 3, welche diese Brüche geben: $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$, so daß also $p^{IV} = 39$, $q^{IV} = 7$, und mithin $p = 39$ und $q = 7$ seyn wird.

Die Werthe, die für p und q gefunden worden, und die Formel zu einem Minimum machen, sind zugleich auch die kleinsten; man kann aber, nach Belieben, nach und nach grössere finden, weil ebendasselbe Glied -3 nach Verfluß von je 6 Zwischengliedern immer wieder zum Vorschein kommt: so daß für den

ersten

erſten Fall $P''' = -3$, $P^{IX} = -3$, $P^{XV} = -3$ ꝛc. und für den zweiten $P^{IV} = -3$, $P^{X} = -3$ ꝛc. Folglich gibt es für den erſtern Fall folgende Werthe für p und q, p''', q''', p^{IX}, q^{IX}, p^{XV}, q^{XV} ꝛc. und für den zweiten p^{IV}, q^{IV}, p^{X}, q^{X}, p^{XVI}, q^{XVI} ꝛc. Aber die correſpondirenden μ, μ', μ'' ꝛc. ſind für den erſten 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1 1, 5, 3, ꝛc. bis ins Unendliche, weil $\mu^{VII} = \mu^{I}$, $\mu^{VIII} = \mu^{II}$ ꝛc. woraus (nach §. 20.) folgende Brüche entſpringen:

$$\frac{7}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{3}{35}, \frac{2}{81}, \frac{1}{116},$$

$$\frac{1}{1486}, \frac{1}{2361}, \frac{5}{13291},$$
$$197 \quad 313 \quad 1762$$

wo man alſo ſtatt p die Zäler des dritten, neunten, fünfzehnten ꝛc. Bruchs, und ſtatt q die zugehörigen Nenner, alſo $p = 15$, $q = 2$, oder $p = 2361$ und $q = 313$ ꝛc. ſetzen kann. Im zweiten Fall ſind die Werthe von μ, μ', μ'' ꝛc. 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2 ꝛc. weil $\mu^{IX} = \mu^{III}$, $\mu^{X} = \mu^{IV}$ ꝛc. woraus folgende Brüche entſpringen:

$$\frac{5}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{37}, \frac{1}{44}, \frac{1}{81}, \frac{1}{125},$$

$$\frac{2}{1843}, \frac{3}{6225}, \frac{5}{32968}. \text{ \&c.}$$
$$331 \quad 1118 \quad 5921 \text{ \&c.}$$

und hier werden der vierte, zehnte, ſechszehnte Bruch die Werthe von p und q geben, welche demnach ſind: $p = 39$, $q = 7$, oder $p = 6225$, und $q = 1118$ ꝛc.

Auf

Auf diese Art lassen sich alle Werthe von p und q finden, welche die gegebene Formel $= -3$ machen, das demnach der kleinste mögliche Werth derselben ist. Es liessen sich auch, wie wir oben gesagt haben, allgemeine Formeln angeben, die alle diese Werthe von p und q in sich enthielten, wobei wir uns aber nicht aufhalten.

Wir fanden, daß das Minimum der vorgegebenen Formel $= -3$, und folglich verneint sey. Man könnte aber auch nach dem kleinsten bejahten Werthe fragen, dessen ebendieselbe Formel fähig ist, und nun müßten also die Reihen P^0, P', P'', P''' &c. für beide Fälle durchgegangen werden. Nun ist im ersteren P^{IV}, und im zweiten $P''' = 5$; die Werthe von p und q also, die den kleinsten bejahten Werth geben, sind im ersten Falle p^{IV}, q^{IV}, oder p^X, q^X &c. und im zweiten p''', q''', p^{IX}, q^{IX} &c. oder $p = 83$, $q = 11$, $p = 13291$, $q = 1762$ &c. und $p = 11$, $q = 2$, oder $p = 1843$, $q = 331$ &c.

Uebrigens muß man sich erinnern, daß die Zalen μ, μ', μ'' &c. die in beiden Fällen gefunden worden, nichts anders sind, als die Glieder der fortlaufenden Brüche, welche die beiden Wurzeln der Gleichung $9\lambda^2 - 118\lambda + 378 = 0$ vorstellen.

Diese Wurzeln werden also seyn:

$$7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \&c.}}}}$$

$$5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \&c.}}}}$$

welche Ausdrücke durch bloſe Wiederholung ebenderſelben Zalen ins Unendliche fortgeſezt werden können. Aus dieſem läßt ſich alſo erſehen, wie man zu verfahren habe, um die Wurzeln einer jeden Gleichung des zweiten Grads in fortlaufende Brüche zu verwandeln.

Anmerkung.

Euler gibt in dem XI. Bande der neuen Petersburger Abhandlungen eine Methode, die der unſrigen ähnlich iſt, obſchon dieſelbe aus etwas andern Grundſäzen hergeleitet worden, nach welcher die Wurzel einer jeden ganzen Zal, die kein Quadrat iſt, in einen fortlaufenden Bruch verwandelt werden kann, und fügt zugleich eine Tabelle bei, in welcher die fortlaufenden Brüche für alle natürliche Zalen bis 120 berechnet ſind. Da dieſe Tabelle bei mehreren Gelegenheiten nüzlich ſeyn kann, beſonders bei Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen vom zweiten Grade, wie im Kap. VII. gezeigt werden ſoll; ſo hoffe ich, es werde dem Leſer angenehm ſeyn, wenn ich dieſe Tabelle ebenfalls beifüge. Nur iſt zu bemerken, daß jeder Wurzel zwei Reihen ganzer Zalen correſpondiren: die obere iſt die Reihe der Zalen P^0, — P', P'', — P''' ꝛc. und die untere diejenige der Zalen μ, μ', μ'', μ''' ꝛc.

v 2	1 1 1 1 ꝛc. 1 2 2 2 ꝛc.
v 3	1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 1 1 2 1 2 1 2 ꝛc.
v 5	1 1 1 1 ꝛc. 2 4 4 4 ꝛc.
v 6	1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 2 2 4 2 4 2 4 ꝛc.
v 7	1 3 2 3 1 3 2 3 1 ꝛc. 2 1 1 1 4 1 1 1 4 ꝛc.
v 8	1 4 1 4 1 4 1 ꝛc. 2 1 4 1 4 1 4 ꝛc.
v 10	1 1 1 1 ꝛc. 3 6 6 6 ꝛc.
v 11	1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 3 3 6 3 6 3 6 ꝛc.
v 12	1 3 1 3 1 3 1 ꝛc. 3 2 6 2 6 2 6 ꝛc.
v 13	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 ꝛc. 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 ꝛc.
v 14	1 5 2 5 1 5 2 5 1 ꝛc. 3 1 2 1 6 1 2 1 6 ꝛc.
v 15	1 6 1 6 1 6 1 ꝛc. 3 1 6 1 6 1 6 ꝛc.
v 17	1 1 1 1 1 ꝛc. 4 8 8 8 8 ꝛc.
v 18	1 2 1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 4 4 8 4 8 4 8 4 8 ꝛc.

v 19	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 ꝛc. 4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 ꝛc.
v 20	1 4 1 4 1 4 1 4 1 ꝛc. 4 2 8 2 8 2 8 2 8 ꝛc.
v 21	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 ꝛc. 4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 ꝛc.
v 22	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 ꝛc. 4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 ꝛc.
v 23	1 7 2 7 1 7 2 7 1 ꝛc. 4 1 3 1 8 1 3 1 8 ꝛc.
v 24	1 8 1 8 1 8 1 ꝛc. 4 1 8 1 8 1 8 ꝛc.
v 26	1 1 1 1 ꝛc. 5 10 10 10 ꝛc.
v 27	1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 5 5 10 5 10 5 10 ꝛc.
v 28	1 3 4 3 1 3 4 3 1 ꝛc. 5 3 2 3 10 3 2 3 10 ꝛc.
v 29	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 ꝛc. 5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 ꝛc.
v 30	1 5 1 5 1 5 1 5 1 ꝛc. 5 2 10 2 10 2 10 2 10 ꝛc.
v 31	1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 ꝛc. 5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 ꝛc.
v 32	1 7 4 7 1 7 4 7 1 ꝛc. 5 1 1 1 10 1 1 1 10 ꝛc.
v 33	1 8 3 8 1 8 3 8 1 ꝛc. 5 1 2 1 10 1 2 1 10 ꝛc.

V 34	1 9 2 9 1 9 2 9 1 ꝛc. 5 1 4 1 10 1 4 1 10 ꝛc.
V 35	1 10 1 10 1 10 1 10 ꝛc. 5 1 10 1 10 1 10 1 ꝛc.
V 37	1 1 1 1 1 ꝛc. 6 12 12 12 12 ꝛc.
V 38	1 2 1 2 1 2 1 ꝛc. 6 6 12 6 12 6 12 ꝛc.
V 39	1 3 1 3 1 3 1 ꝛc. 6 4 12 4 12 4 12 ꝛc.
V 40	1 4 1 4 1 4 1 ꝛc. 6 3 12 3 12 3 12 ꝛc.
V 41	1 5 5 1 5 5 1 ꝛc. 6 2 2 12 2 2 12 ꝛc.
V 42	1 6 1 6 1 6 1 ꝛc. 6 2 12 2 12 2 12 ꝛc.
V 43	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1 7 6 ꝛc. 6 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 1 1 ꝛc.
V 44	1 8 5 7 4 7 5 8 1 8 5 ꝛc. 6 1 1 1 2 1 1 1 12 1 1 ꝛc.
V 45	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1 9 4 ꝛc. 6 1 2 2 2 1 12 1 2 2 2 1 12 1 2 ꝛc.
V 46	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1 10 3 ꝛc. 6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 1 3 ꝛc.
V 47	1 11 2 11 1 11 2 11 1 ꝛc. 6 1 5 1 12 1 5 1 12 ꝛc.
V 48	1 12 1 12 1 12 ꝛc. 6 1 12 1 12 1 ꝛc.

V 50

ν 50	1 1 1 1 ꝛc.	
	7 14 14 14 ꝛc.	
ν 51	1 2 1 2 1 2 ꝛc.	
	7 7 14 7 14 7 ꝛc.	
ν 52	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 3 1 3 ꝛc.	
	7 4 1 2 1 4 14 4 1 2 1 4 14 4 ꝛc.	
ν 53	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1 4 7 ꝛc.	
	7 3 1 1 3 14 3 1 1 3 14 3 1 ꝛc.	
ν 54	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1 5 ꝛc.	
	7 2 1 6 1 2 14 2 1 6 1 2 14 2 ꝛc.	
ν 55	1 6 5 6 1 1 6 5 6 1 ꝛc.	
	7 2 2 2 14 2 2 2 14 2 ꝛc.	
ν 56	1 7 1 7 1 7 1 ꝛc.	
	7 2 14 2 14 2 14 ꝛc.	
ν 57	1 8 7 3 7 8 1 8 7 ꝛc.	
	7 1 1 4 1 1 14 1 1 ꝛc.	
ν 58	1 9 6 7 7 6 9 1 9 6 ꝛc.	
	7 1 1 1 1 1 1 14 1 1 ꝛc.	
ν 59	1 10 5 2 5 10 1 10 5 ꝛc.	
	7 1 2 7 2 1 14 1 2 ꝛc.	
ν 60	1 11 4 11 1 11 4 ꝛc.	
	7 1 2 1 14 1 2 ꝛc.	
ν 61	1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1 12 3 ꝛc.	
	7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 ꝛc.	
ν 62	1 13 2 13 1 13 2 ꝛc.	
	7 1 6 1 14 1 6 ꝛc.	
ν 63	1 14 1 14 1 14 ꝛc.	
	7 1 14 1 14 1 ꝛc.	

v 65	1 1 1 1 ꝛc. 9 16 16 16 ꝛc.
v 66	1 2 1 2 1 ꝛc. 8 8 16 8 16 ꝛc.
v 67	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 ꝛc. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 ꝛc.
v 68	1 4 1 4 1 4 ꝛc. 8 4 16 4 16 4 ꝛc.
v 69	1 5 4 11 3 11 4 5 1 5 4 ꝛc. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 ꝛc.
v 70	1 6 9 5 9 6 1 6 9 ꝛc. 8 2 1 2 1 2 16 2 1 ꝛc.
v 71	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 ꝛc. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 ꝛc.
v 72	1 8 1 8 1 8 ꝛc. 8 2 16 2 16 2 ꝛc.
v 73	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 ꝛc. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 ꝛc.
v 74	1 10 7 7 10 1 10 7 ꝛc. 8 1 1 1 1 16 1 1 ꝛc.
v 75	1 11 6 11 1 11 6 ꝛc. 8 1 1 1 16 1 1 ꝛc.
v 76	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 ꝛc. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 1 2 ꝛc.
v 77	1 13 4 7 4 13 1 13 4 ꝛc. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 ꝛc.
v 78	1 14 3 14 1 14 3 ꝛc. 8 1 4 1 16 1 4 ꝛc.

v 79	1 15 2 15 1 15 2 ꝛc. 8 1 7 1 16 1 7 ꝛc.
v 80	1 16 1 16 1 16 ꝛc. 8 1 16 1 16 1 ꝛc.
v 82	1 1 1 1 ꝛc. 9 18 18 18 ꝛc.
v 83	1 2 1 2 1 2 ꝛc. 9 9 18 9 19 9 ꝛc.
v 84	3 3 1 3 1 3 ꝛc. 9 6 18 6 18 6 ꝛc.
v 85	1 4 9 9 4 1 4 9 ꝛc. 9 4 1 1 4 18 4 1 ꝛc.
v 86	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 ꝛc. 9 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 3 1 ꝛc.
v 87	1 6 1 6 1 6 ꝛc. 9 3 18 3 18 3 ꝛc.
v 88	1 7 9 8 9 7 1 7 9 ꝛc. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 ꝛc.
v 89	1 8 5 5 8 1 8 5 ꝛc. 9 2 3 3 2 18 2 3 ꝛc.
v 90	1 9 1 9 1 ꝛc. 9 2 18 2 18 ꝛc.
v 91	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 ꝛc. 9 1 1 5 1 5 1 1 18 1 1 ꝛc.
v 92	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 ꝛc. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 ꝛc.
v 93	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 ꝛc. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 1 1 ꝛc.

ν 94 $\begin{cases} 1,13,6,5,9,10,3,15,2,15,3,10,9,5,6,13, \text{ &c.} \\ 9,\ 1,2,3,1,\ 1,5,\ 1,8,\ 1,5,\ 1,1,3,2,\ 1,18 \text{ &c.} \end{cases}$

ν 95 $\begin{cases} 1\ 14\ 5\ 14\ \ 1\ 14 \text{ &c.} \\ 9\ \ 1\ 2\ \ 1\ 18\ \ 1 \text{ &c.} \end{cases}$

ν 96 $\begin{cases} 1\ 15\ 4\ 15\ \ 1\ 15 \text{ &c.} \\ 9\ \ 1\ 3\ \ 1\ 18\ \ 1 \text{ &c.} \end{cases}$

ν 97 $\begin{cases} 1\ 16\ 3\ 11\ 8\ 9\ 9\ 8\ 11\ 3\ 16\ \ 1\ 16 \text{ &c.} \\ 9\ \ 1\ 5\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 5\ \ 1\ 18\ \ 1 \text{ &c.} \end{cases}$

ν 98 $\begin{cases} 1\ 17\ 2\ 17\ \ 1\ 17 \text{ &c.} \\ 9\ \ 1\ 8\ \ 1\ 18\ \ 1 \text{ &c.} \end{cases}$

ν 99 $\begin{cases} 1\ 18\ \ 1\ 18\ \ 1 \text{ &c.} \\ 9\ \ 1\ 18\ \ 1\ 18 \text{ &c.} \end{cases}$

So ist also z. B.

$$\nu\, 2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{&c.}}}$$

$$\nu\, 3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{&c.}}}$$

und so weiter.

Und wenn man nach jedem einzelnen dieser fortlaufenden Brüche die convergirenden Brüche

$$\frac{p^0}{q^0}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''} \text{ &c.}$$

bildet, so erhält man

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1.$$
$$(p')^2 - 2(q')^2 = -1.$$
$$(p'')^2 - 2(q'')^2 = 1. \text{ &c.}$$

Und

Und eben so

$$(p^{\circ})^2 - 3(q^{\circ})^2 = \quad 1.$$
$$(p')^2 - 3(q')^2 = -1 \quad 2.$$
$$(p'')^2 - 3(q'')^2 = \quad 1. \quad \&c. \ \&c.$$

Drittes Kapitel.

Ueber die Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grad mit zwei unbekannten Grössen, in ganzen Zalen.

Zusaz zum ersten Kapitel des zweiten Theils.

§. 42.

Wenn eine Gleichung von der Gestalt $ax-by=c$ aufgelöst werden soll, worinn a, b, c gegebene ganze, bejahte oder verneinte Grössen vorstellen, und x und y ebenfalls ganze Zalen seyn sollen; so braucht man nur eine einzige Auflösung zu wissen, um sodann alle mögliche Auflösungen auf eine leichte Art daraus herzuleiten.

Um diß zu zeigen, wollen wir annehmen, die Werthe $x=\alpha$, $y=\beta$ leisten der Bedingung Genüge, so ist also $a\alpha - b\beta = c$, und daher $ax - by = a\alpha - b\beta$, oder $a(x-\alpha) - b(y-\beta) = o$, mithin

$$\frac{b}{a} = \frac{x-\alpha}{y-\beta}.$$

Wenn man nun annimmt, der Bruch $\frac{b}{a}$ sey auf die

kleinste

kleinſte Zal $\frac{b'}{a'}$ gebracht, und b′ und a′ haben alſo keinen gemeinſchaftlichen Theiler mehr, ſo erhellet, daß wofern x—α und y—β ganze Zalen vorſtellen, die Gleichung $\frac{b'}{a'} = \frac{x-\alpha}{y-\beta}$ nicht beſtehen könne, wenn nicht $x - \alpha = mb'$ und $y - \beta = ma'$ iſt, wo m irgend eine ganze Zal vorſtellt. Hieraus findet ſich ſodann allgemein $x = \alpha + mb'$ und $y = \beta + ma'$.

Da m nach Belieben bejaht oder verneint genommen werden kann, ſo iſt leicht zu ſehen, daß dieſe Zal m immer ſo angenommen werden könne, daß der Werth von x nicht gröſſer als $\frac{b'}{2}$ oder y nicht gröſſer als $\frac{a'}{2}$ wird; wobei wir übrigens von den Zeichen dieſer Gröſſe abſtrahiren) *). Hieraus folgt, daß,

*) Nach der Vorausſetzung iſt α ein Werth für x, und nach dem ſo eben Erwieſenen, $\alpha \pm mb'$ ein anderer, wo m willkührlich iſt. Folglich gibt es dieſer Werthe unzälige, die alle in dem Ausdruk $\alpha \pm mb'$ enthalten ſind. Daß aber unter dieſen unzäligen Werthen auch einer zwiſchen die Gränzen $\frac{b'}{2}$ und $-\frac{b'}{2}$ falle, kann alſo gezeigt werden. Da m jede ganze Zal vorſtellt, ſo gibt es alſo unzälige Werthe für x, die alle gröſſer als b′ ſind. Einer dieſer Werthe heiſſe α; Nun ſey $\alpha = nb' + q$, wo $q < b'$ iſt.

Es

daß, um die Gleichung $ax - by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, man statt x nach und nach alle sowol bejahte

Es ist aber q entweder $> \frac{b'}{2}$, oder $< \frac{b'}{2}$, oder $= \frac{b'}{2}$.

Im ersten Falle sey $q = \frac{tb'}{r}$, wo also $\frac{t}{r} > \frac{1}{2}$.

Folglich $x = \alpha \pm mb' = nb' \pm mb' + \frac{tb'}{r}$, oder wenn m negativ genommen wird, $x = (n-m)b' + \frac{tb'}{r}$. Nun sey das willkührliche m so, daß $n - m = -1$, das ist, es sey $m = n + 1$; so ist also $x = -b'\left(1 - \frac{t}{r}\right)$; aber $\frac{t}{r} > \frac{1}{2}$, also $1 - \frac{t}{r} < \frac{1}{2}$, folglich ist $x < -\frac{b'}{2}$.

Ist aber zweitens $q < \frac{b'}{2}$, so ist, wenn wiederum $q = \frac{tb'}{r}$ gesezt wird, wo $\frac{t}{r} < \frac{1}{2}$, in diesem Falle $x = \alpha \pm mb' = nb' + q - mb' = (n-m)b' + \frac{tb'}{r}$. Sezt man nun hier $m = n$, so wird $x = \frac{tb'}{r}$ und also $x < \frac{b'}{2}$.

Sollte aber $q = \frac{b'}{2}$ selbst seyn, so liesse sich statt dieses

bejahte als verneinte ganze Zalen seßen müsse, die zwischen den Gränzen $\frac{b'}{2}$ und $-\frac{b'}{2}$ enthalten sind, und auf diese Art findet sich nothwendig ein Werth für x, der die Gleichung auflößt. Eben so läßt sich auch ein Werth für y finden, der zwischen $\frac{a'}{2}$ und $-\frac{a'}{2}$ enthalten ist.

So findet sich also die erste Auflösung, aus welcher sodann unzälige andre hergeleitet werden können.

§. 43.

Statt dieser Methode aber, die öfters sehr mühsam ist, kann man sich auch derjenigen, die im ersten Kapitel des zweiten Theils erklärt worden, und die äusserst

dieses Werths immer wieder ein andrer $= \alpha$ finden, wo q entweder grösser, oder kleiner, als $\frac{b'}{2}$ ist, und wo also das so eben Erwiesene statt findet.

Wenn also α so ist, daß $q > \frac{b'}{2}$ so ist ein Werth $x < -\frac{b}{2}$, und für $q < \frac{b'}{2}$ gibt es einen andern der $< +\frac{b'}{2}$. Folglich muß zwischen den Gränzen von $+\frac{b'}{2}$ und $-\frac{b'}{2}$ nothwendig ein Werth für x enthalten seyn.

A. d. U.

äusserst einfach und direkt ist, oder auch folgender bedienen.

1) Wenn a und b nicht unter sich Primzalen sind, so kann die Gleichung unmöglich in ganzen Zalen bestehen, wenn die gegebene Zal c nicht ebenfalls durch das gröſste gemeinschaftliche Maas von a und b theilbar ist. Gesezt nun diese Theilung sey wirklich verrichtet, und a′, b′, c′ seyen die gefundenen Quotienten, so ist folgende Gleichung aufzulösen:

$$a'x - b'y = c'$$

wo a und b unter sich Primzalen sind.

2) Wenn die Werthe von p und q gefunden werden können, welche der Gleichung

$$a'p - b'q = \pm 1$$

Genüge leisten, so kann auch $a'x - b'y = c'$ aufgelöst werden. Denn wenn man jene Werthe von p und q mit $\pm c'$ multiplicirt, und $x = \pm pc'$, $x = \pm qc'$ sezt, so wird dadurch $a'x - b'y = c'$ aufgelöst.

Aber die Gleichung $a'p - b'q = \pm 1$, ist immer in ganzen Zalen auflösbar, wie §. 23. gezeigt worden ist; und um die kleinsten Werthe p und q zu finden, muß der Bruch $\frac{b'}{a'}$ nach §. 4. in einen fortlaufenden Bruch verwandelt, und aus demselben nach §. 10. die Reihe der gegen diesen Bruch $\frac{b'}{a'}$ convergirenden Hauptbrüche hergeleitet werden. Der lezte derselben wird $\frac{b'}{a'}$ seyn, und wenn der lezte ohn eins

$\frac{p}{q}$

$\frac{p}{q}$ heißt, so muß nach dem Geſez dieſer Brüche (§. 12.)
$a'p - b'q = \pm 1$ ſeyn, wo das obere Zeichen für den Fall gilt, wo die Stelle des Bruchs $\frac{p}{q}$ gerade, und das untere für denjenigen, wo dieſe Stelle ungerade iſt.

Es iſt alſo erſtens $x = \pm pc'$ und $y = \pm qc'$ und wenn dieſe Werthe α und β heiſſen, ſo hat man zweitens allgemein (§. 42.)

$$x = \pm pc' + mb'$$
$$y = \pm qc' + ma'$$

in welchen beiden Ausdrücken nothwendig alle mögliche Auflöſungen der gegebenen Gleichung in ganzen Zalen enthalten ſind.

Damit aber bei der Anwendung dieſer Methode keine Schwierigkeit entſtehe, ſo bemerke ich noch, daß, obgleich die Zalen a und b bejaht oder verneint ſeyn können, ſie gleichwol immer bejaht angenommen werden können, wenn man anders x entgegengeſezte Zeichen gibt, wenn a verneint iſt, und ſo auch y wenn b verneint iſt.

Beiſpiel.

§. 44.

Um dieſe Methode auf ein Beiſpiel anzuwenden, wollen wir dasjenige vornehmen, das im I. Kapitel §. 14. gegeben worden, wo die Gleichung $39p = 56q + 11$ aufgelöſt werden ſolle. Wenn man alſo hier p und q in x und y verwandelt, ſo muß $39x - 56y = 11$ ſeyn. Es iſt daher $a = 39$, $b = 56$ und $c = 11$, und

und da 56 und 39 unter sich Primzalen sind, so ist $a' = 39$, $b' = 56$, $c' = 11$. Man verwandle also den Bruch $\frac{56}{39}$ in einen fortlaufenden Bruch, und stelle deshalb nach §. 20. folgende Rechnung an:

$$\begin{array}{rr|l|l} & 39 & 56 & 1 \\ & & 39 & \\ \hline & 17 & 39 & 2 \\ & & 34 & \\ \hline & 5 & 17 & 3 \\ & & 15 & \\ \hline & 2 & 5 & 2 \\ & & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 \\ & & 2 & \\ \hline \end{array}$$

Aus den Quotienten 1, 2, 3, 2, 2 mache man die Brüche:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{7}, \frac{10}{16}, \frac{23}{39}, \frac{56}{39}$$

so wird der lezte ohne eins $\frac{23}{16}$ derjenige seyn, den wir mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet haben, so daß $p = 23$, $q = 16$ ist, und da dieser Bruch der vierte, und seine Stelle also gerade ist, so muß das obere Zeichen genommen werden, so daß also allgemein seyn wird

$$x = 23.\ 11 + 56\ m$$
$$y = 16.\ 11 + 39\ m$$

wo m jede ganze bejahte oder verneinte Zal seyn kann.

Anm.

Anmerkung.

§. 45.

Die erſte Auflöſung dieſes Problems verdankt man dem Bachet von Meziriac, welcher dieſelbe in der zweiten Auflage ſeiner mathematiſchen Erholungsſtunden, die den Titel: Probleme führen, bekannt gemacht hat. Die erſte Auflage dieſes Werks iſt vom Jahr 1612; aber die Auflöſung von welcher wir hier reden, erſchien erſt in der zweiten Auflage, im Jahr 1624. Die Methode des Bachet iſt eben ſo ſinnreich als direkt, und es bleibt weder in Abſicht auf ihre Allgemeinheit, noch auf ihre Zierlichkeit, nicht das geringſte mehr zu wünſchen übrig.

Ich ergreife mit Vergnügen dieſe Gelegenheit, dieſem gelehrten Schriftſteller hierüber diejenige Gerechtigkeit wiederfahren zu laſſen, die ihm gebührt; denn ich habe bemerkt, daß die Geometer, die eben daſſelbe Problem nach ihm abhandelten, mit keinem Worte von ſeiner Arbeit Erwähnung gethan haben.

Bachet's Methode beſteht kürzlich in folgendem:

Nachdem derſelbe gezeigt, wie die Auflöſung der Gleichung ax — by = c (wo a und b unter ſich Primzalen ſind), auf dieſe ax — by = ± 1 zurük geführt werden könne, ſo löſet er dieſe lezte Gleichung auf, und ſchreibt deshalb vor, man ſolle mit den Zalen a und b dieſelbe Operation vornehmen, wie wenn ihr größter gemeinſchaftlicher Theiler geſucht würde (wie auch wir oben gethan haben). Wenn nun c, d, e, f ꝛc. die aus den Theilungen entſpringenden Ueberreſte ſind, und f z. B. den lezten Ueberreſt vorſtellt, welcher nothwendig = 1 iſt, (weil a

und b unter sich Primzalen sind), so muß man, wenn die Anzal dieser Ueberreste, wie im gegenwärtigen Fall gerade ist, setzen $e \mp 1 = \varepsilon$, $\frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta$,

$\frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma$, $\frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta$, $\frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha$

so werden diese lezten Zalen β und α die kleinsten Werthe von x und y seyn. Wäre aber die Anzal dieser Ueberreste ungerade, und also z. B. g der lezte Ueberrest, so müßte man setzen

$f \pm 1 = \xi$, $\frac{\xi e \mp 1}{f} = \varepsilon$, $\frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta$ &c.

Nach diesem ist nun leicht zu sehen, daß diese Methode eben dieselbe ist, wie die im ersten Kapitel vorgeschriebene; sie ist aber deswegen sehr unbequem, weil sie Divisionen erfordert. Doch können Geometer, die an dergleichen Problemen ein Vergnügen finden, in den Werken des Bachet selbst nachsehen, welcher Kunstgriffe er sich bediente, um auf die oben angeführte Regel zu kommen, und die vollständige Auflösung der Gleichungen $ax - by = c$ daraus herzuleiten.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Methode, Gleichungen mit zwei unbekannten Gröſſen in ganzen Zalen aufzulöſen, wenn eine derſelben nicht über den erſten Grad ſteigt.

Zuſaz zum dritten Kapitel.

§. 46.

Es ſey die allgemeine Gleichung $a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + \&c. = 0.$ gegeben, worinn die Coefficienten a, b, c, d ꝛc. gegebene ganze Zalen, x und y aber zwei unbeſtimmte Gröſſen vorſtellen, die ebenfalls ganze Zalen ſeyn ſollen.

Wenn man den Werth von y aus dieſer Gleichung ſucht, ſo erhält man

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 \ \&c.}{c + ex + gx^2 + kx^3 + \&c.}$$

und die Frage beruht alſo darauf, für x einen ſolchen Werth in ganzen Zalen zu finden, daß der Zäler dieſes Bruchs durch ſeinen Nenner ohne Reſt getheilt werden könne.

Man ſetze demnach

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \text{ꝛc.}$$
$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 + \text{ꝛc.}$$

und eliminire x aus dieſen beiden Gleichungen, ſo findet ſich durch die gewöhnlichen Regeln der Algebra eine Endgleichung von der Form

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \text{ꝛc.} = 0.$$

wo die Coefficienten A, B, C ꝛc. rationale und ganze Funktionen der Zalen a, b, c ꝛc. ſind.

Da aber $y = -\frac{p}{q}$, ſo iſt $p = -qy$; ſezt man nun dieſen Werth in obige Gleichung, ſo wird

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Epq^2y^2 + Fq^2 + \text{ꝛc.} = 0.$$

ſeyn; woraus man ſiehet, daß alle Glieder, auſſer dem erſten A, mit q multiplicirt ſind. Damit alſo q und y zugleich ganze Zalen ſeyn können, muß A nothwendig durch q theilbar ſeyn. Man ſuche daher alle Theiler der bekannten Zal A, und ſetze nach und nach jeden dieſen Theiler ſtatt q, ſo ergibt ſich aus jeder dieſer Vorausſetzungen eine beſtimmte Gleichung in x ausgedrükt, von welcher, nach den bekannten Methoden, die rationale und ganze Wurzeln, wenn welche vorhanden ſind, geſucht werden können. Dieſe Wurzeln ſetze man nun ſtatt x, und dann wird ſich zeigen, ob die Werthe, die für p und q ſich ergeben, ſo ſind, daß $\frac{p}{q}$ eine ganze Zal werde. Auf dieſe Art iſt man ſicher, alle diejenigen ganzen Werthe von x zu finden, die in der vorgegebenen Gleichung auch für y ganze Werthe geben.

Hier-

Hieraus ſiehet man, daß die Auflöſungen dieſer Gleichungen in ganzen Zalen nothwendig immer auf eine beſtimmte Anzal eingeſchränkt ſind. Indeſſen gibt es einen Fall, der eine Ausnahme macht, und der gegenwärtigen Methode entgeht.

§. 47.

Dieſer Fall iſt derjenige, wo die Coefficienten e, g, k ꝛc. = o ſind, und alſo

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4}{c} \text{ iſt.}$$

Um nun hier alle diejenigen Werthe von x zu finden, welche ſo beſchaffen ſind, daß die Gröſſe

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 \text{ ꝛc.}$$

durch c theilbar werde, nehme ich an, man habe eine ganze Zal n gefunden, die dieſer Bedingung Genüge leiſtet, und dann iſt leicht zu ſehen, daß jede andre Zal von der Geſtalt $n \pm \mu c$ ebenfalls Genüge leiſte, wenn μ irgend eine ganze Zal vorſtellt. Ueberdiß erhellet, daß, wenn $n > \frac{c}{2}$, (wobei wir von den Zeichen von n u. c abſtrahiren), die Zal μ u. das derſelben voranſtehende Zeichen immer ſo beſtimmt werden könne, daß $n \pm \mu c < \frac{c}{2}$ werde. Zugleich ſiehet man aber auch, daß diß für gegebene n und c auf mehr als eine Art möglich ſey. Wenn alſo dieſer Werth von $n \pm \mu c$, welcher $< \frac{c}{2}$ iſt, durch n^I bezeichnet wird, ſo wird überhaupt $n = n^I \mp \mu c$ ſeyn, wo μ jede ganze Zal bedeuten kann.

Hieraus folgt, daß, wenn man in der Formel $a + bx + dx^2 + fx^3 +$ ꝛc. ſtatt x nach und nach

alle ganze bejahte und verneinte Zalen ſezt, die $< \frac{c}{2}$ ſind, und diejenigen derſelben durch n^{I}, n^{II}, n^{III} ꝛc. bezeichnet, welche die Gröſſe $a + bx + dx^2 +$ ꝛc. durch c theilbar machen, alle andre Zalen, die eben dieſe Bedingung erfüllen, nothwendig in dieſen Formeln enthalten ſeyn müſſen

$$n^{I} \pm \mu^{I} c,\ n^{II} \pm \mu^{II} c,\ n^{III} \pm \mu^{III} c \text{ ꝛc.}$$

wo μ^{I}, μ^{II}, μ^{III} ꝛc. jede ganze Zal bedeuten können.

Hier lieſſen ſich mehrere Bemerkungen machen, die Erforſchung der Zalen n^{I}, n^{II}, n^{III} ꝛc. zu erleichtern; ich halte mich aber nicht länger bei dieſer Materie auf, indem ich in einer beſondern Abhandlung, die in den Denkſchriften der Berliner Akademie vom Jahr 1768 enthalten iſt, und den Titel: Nova Methodus reſolvendi Problemata indeterminata, führt, weitläuftig hievon gehandelt habe, worauf ich alſo den Leſer verweiſe. Man ſehe auch eine Abhandlung von Legendre über die unbeſtimmte Analytik in dem Recueil de l'académie des ſciences de Paris, vom Jahr 1785.

§. 48.

Indeſſen will ich am Schluſſe dieſes Kapitels noch etwas von der Art ſagen, zwei Zalen x und y zu beſtimmen, daß der Bruch

$$\frac{ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + fy^{m-3}x^3 + \text{ꝛc.}}{c}$$

eine ganze Zal werde, weil dieſe Unterſuchung in der Folge von dem größten Nutzen ſeyn wird.

Ich ſetze voraus, y und x, ſo wie auch y und c ſeyen unter ſich Primzalen, und behaupte nun, es

könne

könne immer $x = ny - cz$ geſezt werden, wo n und z unbeſtimmte Grösſen bedeuten. Denn, wenn man x, y und c als gegebene Zalen betrachtet, ſo erhält man eine Gleichung, welche nach dem dritten Kapitel immer in ganzen Zalen auflösbar iſt, weil y und c, nach der Vorausſeſzung, kein andres gemeinſchaftliches Maas haben, als die Einheit. Sezt man aber dieſen Werth von x in den Ausdruk $ay^m + by^{m-2}x$ + ꝛc., ſo verwandelt ſich derſelbe in

$$(a + bn + dn^3 + fn^2 +)\ y^m \text{ ꝛc.}$$
$$- (b + 2dn + 3fn^2 + \text{ꝛc.})\ cy^{m-1}z$$
$$+ (d + 3fn + \text{ꝛc.})\ c^2 y^{m-2} z^2$$
$$- \text{ꝛc.} = c.$$

Man ſiehet aber leicht, daß dieſe Grösſe nicht durch c theilbar ſeyn könne, wenn nicht das erſte Glied

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 + \text{ꝛc.})\ y^m$$

durch dieſe Grösſe theilbar iſt, weil alle übrigen Glieder mit c multiplicirt ſind. Da aber, nach der Vorausſeſzung, c und y unter ſich Primzalen ſind, ſo muß die Grösſe

$$a + bn + dn^2 + fn^3 + \text{ꝛc.}$$

ſelbſt durch c theilbar ſeyn. Man ſuche alſo nach der Methode des vorhergehenden §. alle Werthe n, welche dieſer Bedingung Genüge leiſten; hierauf mache man für jeden dieſer Werthe

$$a + bn + dn^2 + fn^3 + \text{ꝛc.} = cA$$
$$b + 2dn + 3fn^2 + \text{ꝛc.} = B$$
$$d + 3fn + = C \text{ ꝛc.}$$

ſo verwandelt ſich die obige Gleichung, nachdem dieſe Grösſen anſtatt obiger Werthe ſubſtituirt, und alle Glieder mit c dividirt worden, in

$$Ay^m - By^{m-1}z + Ccy^{m-2}z^2 - \text{ꝛc.} = 1$$

Dieſe Gleichung, die jezt alſo auf die Form von §. 30 gebracht worden, kann demnach auch nach denen im

II. Kapitel vorgetragenen Methoden behandelt werden, vermittelſt welcher ſich alle Werthe von y und z finden laſſen. Nachdem nun dieſe Werthe, ſo wie auch n gefunden worden, ſo hat man allgemein $x = ny - cz$.

Wir haben bei der vorhergehenden Auflöſung vorausgeſezt, daß x und y unter ſich Primzalen ſeyn ſollen, desgleichen auch y und c. Dieſe Vorausſetzungen ſind zwar erlaubt, weil x und y unbeſtimmte Zalen bedeuten; da ſie aber nicht weſentlich ſcheinen, ſo müſſen wir nun noch unterſuchen, in welchem Fall ſie aufhören, ſtatt zu finden.

Wir wollen daher annehmen, 1) x und y können ein gemeinſchaftliches Maas α haben, ſo läßt ſich alſo in der vorgegebenen Gleichung anſtatt x und y durchaus αx^I und αy^I ſetzen, wo ſodann x^I und y^I als Primzalen unter ſich betrachtet werden können. Nun finden ſich durch dieſe Subſtitution alle Glieder der erſten Seite der Gleichung durch α^m multiplicirt; folglich muß die zweite Seite c durch α^m theilbar ſeyn. Hieraus folgt nun, daß man für α keine andre Zalen ſetzen könne, als diejenigen Theiler von c, die in die Potenz m erhoben ſind. Wenn daher die Zal c keinen Factor enthält, oder in die Potenz m erhoben iſt, ſo kann man verſichert ſeyn, daß die Zalen x und y nothwendig unter ſich Primzalen ſeyn müſſen.

Enthält aber die Zal c einen oder mehrere Faktoren, die in die Potenz m erhoben ſind, ſo muß man für α nach und nach jeden dieſer Faktoren, oder jedes Produkt mehrerer derſelben ſetzen, deren mte Potenz in c dividirt werden kann, und diß wird ſodann eben

ſo

so viele verschiedene Auflösungen geben, wenn man bei jeder derselben x^I und y^I als Primzalen unter sich betrachtet.

Man nehme nun auch 2) an, y und c haben ein gemeinschaftliches Maas β, und setze daher anstatt y und c die Werthe βy^I und βc^I, wo also y^I und c^I unter sich Primzalen sind. Durch diese Substitutionen sind alle Glieder der ersten Seite, welche y enthalten, durch eine Potenz von β multiplicirt; nur das lezte Glied, das ich durch gx^m vorstellen will, und das kein y enthält, wird nicht durch β multiplicirt seyn. Weil aber die zweite Seite der Gleichung sich in βc^I verwandelt, so folgt, daß auch das Glied gx^m durch β theibar seyn müsse. Da nun vorausgesetzt wird, daß x und y unter sich Primzalen sind, so kann x nicht durch β theilbar seyn; folglich muß der Coefficient g durch diese Grösse getheilt werden können. Hieraus schliesse ich also, daß man anstatt β nach und nach alle Theiler von g setzen könne; nachdem man aber βy^I und βc^I anstatt y und c gesezt, und die ganze Gleichung durch β getheilt hat, so wird man aufs neue auf den Fall gerathen, wo die unbestimmte Grösse y^I und die Zal c^I, die das zweite Glied ausmacht, nothwendig unter sich Primzalen seyn müssen.

Fünftes Kapitel.

Direkte und allgemeine Methode, die Werthe von x zu finden, welche den Ausdruk $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational machen, wie auch die unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grad mit zwei unbekannten Grössen aufzulösen, wenn sie anders Auflösungen dieser Art zulassen.

Zusaz zum vierten Kapitel.

§. 49.

Vor allen Dingen nehme ich an, die bekannten Grössen a, b und c seyen ganze Zalen: Denn, wenn sie Brüche wären, so liessen sie sich alle auf einen gemeinschaftlichen Nenner, der ein Quadrat wäre, bringen, den man also beiseit setzen könnte. Sodann setze ich einstweilen voraus, daß x sowol eine ganze Zal, als einen Bruch bedeuten könne, und werde erst weiter unten zeigen, wie die Frage aufgelößt werden müsse, wenn x eine ganze Zal seyn soll.

Es sey daher $\sqrt{(a + bx + cx^2)} = y$
und mithin $2cx + b = \sqrt{(4cy^2 + b^2 - 4ac)}$; so besteht also die ganze Schwierigkeit darinn, den Ausdruk $\sqrt{(4cy^2 + b^2 - 4ac)}$ rational zu machen.

§. 50.

§. 50.

Laßt uns daher allgemein annehmen, der Ausdruk $\sqrt{(Ay^2 + B)}$ solle rational gemacht, oder welches eben so viel ist, $Ay^2 + B$ solle in ein Quadrat verwandelt werden, wo A und B gegebene Zalen sind, y hingegen eine unbestimmte Zal vorstellt, die aber rational seyn muß.

Wäre nun erstlich eine der beiden Grössen A und B der Einheit, oder überhaupt irgend einer Quadratzal gleich, so könnte diß Problem durch die bekannten Diophanteischen Methoden aufgelöst werden, welche im vierten Kapitel des zweiten Theils abgehandelt worden sind. Wir übergehen also diese Fälle, oder führen vielmehr alle andre auf sie zurük.

Ferner: hätten die Grössen A und B Quadrate zu Factoren, so dürfte man auch diese beiseit setzen, und statt A und B nur die Quotienten nehmen, die aus der Division dieser Grössen durch die gröstmöglichen Quadrate entspringen. Denn, wenn $A = \alpha^2 A^I$ und $B = \beta^2 B^I$ gesezt werden, so muß also $A^I \alpha^2 y^2 + B^I \beta^2$ ein Quadrat seyn. Nun sey $\frac{\alpha y}{\beta} = y^I$, so muß demnach die unbekannte Grösse y^I so bestimmt werden, daß $A^I (y^I)^2 + B^I$ ein Quadrat ist.

Hieraus folgt aber auch, daß nachdem derjenige Werth y gefunden worden, welcher $Ay^2 + B$ (wo in A und B die quadratische Faktoren α^2 und β^2 hinweggeworfen worden sind) zu einem Quadrate macht, nachher diese gefundene Zal y mit $\frac{\beta}{\alpha}$ multiplicirt

werden

werden müſſe, um diejenige Gröſſe zu erhalten, die der Bedingung Genüge leiſtet.

§. 51.

Wir betrachten daher den Ausdruk $Ay^2 + B$, worinn A und B gegebene ganze Zalen vorſtellen, die kein Quadrat zum Faktor haben: und da vorausgeſezt wird, y könne auch ein Bruch ſeyn, ſo ſey $y = \frac{p}{q}$, und p und q ſolche ganze Zalen, die kein gemeinſchaftliches Maas haben, ſo, daß alſo der Bruch $\frac{p}{q}$ auf ſeine kleinſte Zal gebracht ſey. Die Gröſſe $\frac{Ap^2}{q^2} + B$, und mithin auch $Ap^2 + Bq^2$ muß demnach ein Quadrat ſeyn, ſo daß alſo $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ iſt, wo p, q und z ganze Zalen bedeuten.

Es müſſen aber q und A, und ſo auch p und B unter ſich Primzalen ſeyn; denn wenn q und A einen gemeinſchaftlichen Theiler hätten, ſo iſt klar, daß das Glied Bq^2 durch das Quadrat dieſes Theilers theilbar wäre; das Glied Ap^2 aber wäre nur durch die erſte Potenz deſſelben theilbar, weil q und p unter ſich Primzalen ſind, und A nach der Vorausſetzung keinen andern quadratiſchen Theiler enthält. Folglich wäre die Gröſſe $Ap^2 + Bq^2$ nur ein einzigesmal durch den gemeinſchaftlichen Theiler von q und A theilbar, und könnte alſo unmöglich ein Quadrat ſeyn. Eben ſo kann auch von den Gröſſen p und B bewieſen werden, daß ſie keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben können.

Auflösung.

der Gleichung $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ in ganzen Zalen.

§. 52.

Gesezt A sey grösser als B; man schreibe daher diese Gleichung also: $Ap^2 = z^2 - Bq^2$, woraus nun sogleich erhellet, daß, da p, q und z ganze Zalen sind, $z^2 - Bq^2$ durch A theilbar seyn müsse. Weil aber (nach dem vorhergehenden §.) A und q unter sich Primzalen sind, so sezte man nach der, Kap. IV. §. 48. erklärten Methode

$$z = nq - Aq^I,$$

wo n und q^I unbestimmte ganze Zalen vorstellen, wodurch die Formel $z^2 - Bq^2$ in

$$(n^2 - B)\, q^2 - 2\, n\, Aqq^I + A^2 (q^I)^2$$

verwandelt wird, wo $n^2 - B$ durch A theilbar seyn muß, und n nicht $> \frac{A}{2}$ ist.

Man probire also für n alle ganze Zalen, die nicht grösser als $\frac{A}{2}$ sind, und wenn keine gefunden wird, die so ist, daß $n^2 - B$ durch A theilbar wird, so läßt sich ohne weiters daraus schliessen, daß die Gleichung $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ nicht in ganzen Zalen aufgelöst, und also auch $Ay^2 + B$ nie ein Quadrat werden könne.

Findet sich aber einer oder mehrere Werthe für n, so sezte man sie der Reihe nach statt n, und sezte die Rechnung weiter fort, wie sogleich gezeigt werden soll.

Vorher bemerke ich nur noch, daß es unnüz ist,

für

für n grössere Zalen zu nehmen, als $\frac{A}{2}$; denn, wenn n^I, n^{II}, n^{III} ꝛc. diejenigen Werthe von n bedeuten, die kleiner, als $\frac{A}{2}$ sind, und durch welche $n^2 - B$ durch A theilbar wird, so werden alle andere Werthe, die eben diß leisten, in den Formeln

$n^I \pm \mu^I A$, $n^{II} \pm \mu^{II} A$, $n^{III} \pm \mu^{III} A$ ꝛc.

enthalten seyn (IV. Kap. §. 47.). Aber, wenn man diese Werthe anstatt n in die Formel

$$(n^2 - B)\, q^2 - 2\, n\, Aqq^I + A^2 (q^I)^2,$$

d. i. in $(nq - Aq^I)^2 - Bq^2$,

sezt, so ist klar, daß ebendieselbe Grösse erhalten wird, als wenn man blos n^I, n^{II}, n^{III} ꝛc. statt n sezte, und zu q^I die Grössen $\mp \mu^I q$, $\pm \mu^{II} q$ ꝛc. addirte, so daß, da q^I eine unbestimmte Zal ist, diese Substitutionen also solche Formeln geben, die nicht von jenen verschieden sind, welche durch die Werthe n^I, n^{II}, n^{III} ꝛc. allein erhalten werden. *)

§. 53.

*) Wenn in $(n^2 - B)\, q^2 - 2\, nAqq^I + A^2 (q^I)^2$ oder $(nq - Aq^I)^2 - 2\, Bq^2$ statt n, der Werth $n^I \pm \mu^I A$ gesezt wird, so verwandelt sich dieser Ausdruk in

$$\left(n^I q - A\,(q^I \mp \mu^I q)\right)^2 - Bq^2.$$

Aber q^I ist eine unbestimmte Grösse, mithin auch $q \mp \mu^I q$. Setzen wir nun diese leztere $= \gamma$, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruk in

$$(n^I q - A\gamma)^2 - Bq^2.$$

Substituirt man aber in

$(nq - Aq^I)^2 - Bq^2$ statt n,

nur allein den Werth n^I, so verwandelt sich dieser Ausdruk in $(n^I q - Aq^I)^2 - Bq^2$.

§. 53.

Weil also $n^2 - B$ durch A theilbar seyn muß, so sey A^I der Quotient dieser Theilung, und demnach $AA^I = n^2 - B$; wird nun die Gleichung $Ap^2 = z^2 - Bq^2 (n^2 - B)q^2 - 2nAqq^I + A^2(q^I)^2$. mit A dividirt, so verwandelt sie sich in

$$p^2 = A^I q^2 - 2nqq^I + A(q^I)^2;$$

wo A^I nothwendig kleiner als A ist, weil

$A^I = \frac{n^2 - B}{A}$, und $B < A$, und n nicht $> \frac{1}{2}A$.

Wenn nun

1) A^I eine Quadratzal ist, so erhellet von selbst, daß diese Gleichung durch die bekannten Methoden aufgelöst werden könne, und man wird die kleinste mögliche Auflösung erhalten, wenn man $q^I = 0$, und $q = 1$ sezt, wodurch sodann $p = \sqrt{A^I}$ wird.

Ist aber

2) A^I kein Quadrat, so muß man sehen, ob diese Zal kleiner als B ist, oder durch irgend eine Quadratzal getheilt werden kann; so daß der Quotient (wenn wiederum von den Zeichen abstrahirt wird), kleiner als B ist. In diesem Fall nun multiplicire man durch A^I, so wird, weil $AA^I - n^2 = -B$,

$$A^I p^2 = (A^I q - nq^I)^2 - B(q^I)^2;$$

so daß also $B(q^I)^2 + A^I p^2$ ein Quadrat seyn

Da aber q^I hier, so wie im vorhergehenden γ, eine unbestimmte Gröſſe vorstellt, so erhellet die Wahrheit der obigen Behauptung.

Anm. d. Ueb.

seyn muß; wenn daher diese Gleichung mit p^2 dividirt, $\frac{q'}{p} = y^I$, und $A^I = C$ gesezt wird, so muß $B(y^I)^2 + C$ ein Quadrat werden, welcher Ausdruk, wie man siehet, demjenigen des §. 52. ähnlich ist. Wenn nun C einen quadratischen Theiler γ^2 enthält, so kann dieser hinwegelassen werden, nur muß man nachher den für y^I gefundenen Werth mit γ multipliciren, um den wahren Werth dieser Grösse zu bekommen, und so ergibt sich dann eine Formel, welche in derjenigen des §. 51. enthalten ist, nur mit dem Unterschiede, daß hier B und C kleiner seyn werden, als dort A und B.

§. 54.

Ist aber A^I nicht kleiner als B, und kann auch diese Grösse, nachdem sie mit dem größten quadratischen Theiler, den sie etwan enthält, dividirt worden, nicht kleiner als B werden, so sey in diesem Falle $q = \nu q^I + q^{II}$. Dieser Werth, in obige Gleichung gesezt, verwandelt sie in

$$p^2 = A^I (q^{II})^2 - 2 n^I q^{II} q^I + A^{II} (q^I)^2$$

wo $n^I = n - \nu A^I$ und

$$A^{II} = A^I \nu^2 - 2 n \nu + A = \frac{(n^I)^2 - B.}{A^I}$$

Nun bestimme man, wie solches immer möglich ist *), die ganze Zal ν also, daß n^I nicht $> \frac{1}{2} A^I$, (wobei wiederum vom Zeichen abstrahirt wird,) und dann erhellet, daß $A^{II} < A^I$ seyn müsse, weil $A^{II} = \frac{(n^I)}{}$

*) Aus $n^I = n - \nu A^I$.

$= \frac{(n')^2 - B}{A'}$, und $B =$ oder $< A'$, und $n' =$ oder $< \frac{1}{2} A'$ ist.

Nun läßt sich hier wieder ebenderselbe Schluß machen, wie im vorhergehenden §. Ist nemlich A'' ein Quadrat, so ist das Problem aufgelößt. Ist aber A'' kein Quadrat, so ist es entweder $< B$, oder wird durch die Division mit einem quadratischen Theiler kleiner, und in diesem ersten Falle werde die Gleichung mit A'' multiplicirt, so ergibt sich, wenn $\frac{p}{q''} = y'$ und $A'' = C$ gesezt wird, die Formel $B(y')^2 + C$, welche ein Quadrat werden muß, und in welcher die Coefficienten B und C, (nachdem die quadratischen Theiler, wenn welche vorhanden sind, weggeworfen worden) kleiner seyn werden als die Coefficienten der Formel $A y^2 + B$. (§. 51.)

Findet aber dieser Fall nicht statt, und ist also $A'' > B$, oder als B durch einen quadratischen Theiler dividirt, so mache man wie oben

$$q' = \nu' q'' + q'''$$

und sodann verwandelt sich obige Gleichung in diese

$$p^2 = A'''(q'')^2 - 2 n'' q'' q''' + A''(q''')^2$$

wo $n'' = n' - \nu' A''$

und $A''' = A''(\nu')^2 - 2 n' \nu' + A' = \frac{(n'')^2 - B}{A''}$.

Man nehme nun statt ν' wiederum eine solche ganze Zal, daß n'' nicht $> \frac{1}{2} A''$, und da B nicht $> A''$, (nach der Voraussezung) so folgt aus der Gleichung $A''' = \frac{(n'')^2 - B}{A''}$, daß $A''' < A''$

seyn wird, und nun lassen sich wieder eben die Schlüsse machen, wie oben, und ähnliche Folgerungen daraus ziehen, u. s. w.

Da indessen die Grössen A, A′, A″, A‴ ꝛc. eine abnehmende Reihe ganzer Zalen bilden, so ist klar, daß man endlich nothwendig auf ein Glied kommen müsse, das kleiner als die gegebene Zal B ist. Heißt dieses Glied C, so erhält man, wie oben, die Formel $B(y')^2 + C$, welche einem Quadrat gleich gemacht werden muß. Auf diese Art können wir also, durch die so eben erklärten Operationen, die Formel $Ay^2 + B$ jederzeit in eine andre einfachere $B(y')^2 + C$ verwandeln, wenn das Problem auflösbar ist.

§. 55.

Auf eben die Art, wie $Ay^2 + B$ in $B(y')^2 + C$ verwandelt worden, kann auch dieser leztere Ausdruk in $B(y'')^2 + D$ verwandelt werden, wo D kleiner als C seyn wird, u. s. w. Und da die Zalen A, B, C, D u. s. w., eine abnehmende Reihe ganzer Zalen bilden, und mithin nicht ins Unendliche fortgesezt werden können, so erhellet daß also diese Operation immer nothwendig ihre Gränzen haben müsse. Läßt die Frage keine Auflösung in ganzen Zalen zu, so gelangt man endlich auf eine unmögliche Bedingung; ist aber die Frage auflösbar, so wird man immer auf eine Gleichung kommen, die der Gleichung des §. 53. ähnlich ist, und wo einer der beiden Coefficienten, wie A′, ein Quadrat seyn wird; so daß also die Gleichung durch die bekannten Methoden aufgelößt werden kann. Aus dieser lassen sich sodann, wenn man immer auf die unmittelbar vorhergehende zurükgeht, alle übrigen bis auf die erste $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ auflösen.

Läßt

Laßt uns dieſe Methode durch einige Beiſpiele erläutern.

1. Beiſpiel.

§. 56.

Man ſoll für x einen rationalen Werth finden, der den Ausdruk

$$7 + 15x + 13x^2$$

zu einem Quadrat macht. (Man ſehe das IV. Kap. §. 57. im II. Theile.)

Hier iſt alſo $a = 7$, $b = 15$, $c = 13$; alſo $4c = 4.13$, und $b^2 - 4ac = -139$; Wenn daher y die Wurzel des geſuchten Quadrats iſt, ſo muß $4.13y^2 - 139$ ein Quadrat werden; mithin iſt $A = 4.13$, und $B = -139$, woraus man ſogleich erſiehet, daß A durch das Quadrat 4 theilbar iſt. Man werfe alſo dieſen quadratiſchen Theiler ſogleich hinweg, und ſetze blos $A = 13$; doch muß man ſich aus §. 50. erinnern, daß nachher der für y gefundene Werth wiederum durch 2, als die Wurzel aus 4 getheilt werden muß, um den wahren Werth zu erhalten.

Es iſt alſo, wenn $y = \frac{p}{q}$ geſezt wird,

$$13p^2 - 139q^2 = z^2;$$

oder, weil $139 > 13$, ſo ſey $y = \frac{q}{p}$ damit die Gleichung

$$-139p^2 + 13q^2 = z^2,$$

erhalten werde, woraus

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

Nun ſetze man (nach §. 52.) $z = nq - 139q'$, und nehme für n eine ganze Zal, die nicht $> \frac{139}{2}$, d. i. die < 70, und ſo iſt, daß $n^2 - 13$ durch 139 theilbar ſey. Dieſe Zal n wird $= 41$ ſeyn, mithin $n^2 - 13 = 1668. = 139. 12$: ſubſtituirt man nun den gefundenen Werth, und dividirt mit -139, ſo findet ſich

$$p^2 = -12q^2 + 2.41qq' - 139(q')^2.$$

Da aber -12 kein Quadrat iſt, ſo hat dieſe Gleichung die erforderlichen Bedingungen nicht: weil nun 12 bereits kleiner als 13 iſt, ſo multiplicire man die ganze Gleichung mit -12, ſo wird ſie

$$-12p^2 = (-12q + 41q')^2 - 13(q')^2$$

werden, ſo, daß alſo $13(q')^2 - 12p^2$, oder wenn $\frac{q'}{p} = y'$ geſezt wird, $13(y')^2 - 12$ ein Quadrat werden muß.

Hieraus erhellet, daß $y' = 1$ geſezt werden müſſe. Da wir aber dieſen Werth einem bloſen Zufall zu verdanken haben, ſo wollen wir die Rechnung nach unſrer Methode weiter fortſetzen, bis wir auf eine Formel kommen, die durch die bekannten Methoden auflösbar iſt. Da 12 durch 4 theilbar iſt, ſo werfe ich auch dieſen quadratiſchen Theiler hinweg; erinnere mich aber, daß ich nachher y' mit $\sqrt{4}$ oder mit 2 multipliciren muß. Folglich muß $13(y')^2 - 3$ oder, wenn $y' = \frac{r}{s}$ geſezt wird, (wo r und s keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, und wie der Bruch $\frac{p}{q}$ auf

auf ihre kleinſten Zalen gebracht ſind), $13r^2 - 3s^2$ in ein Quadrat verwandelt werden. Die Wurzel deſſelben ſey $= z'$; und alſo

$$13r^2 = (z')^2 + 3s^2.$$

Man mache $z' = ms - 13s'$, wo m eine ganze Zal iſt, die nicht $> \frac{13}{2}$, alſo < 7, und ſo ſeyn muß, daß $m^2 + 3$ durch 13 theilbar iſt. Aber dieſe Zal iſt 6, diß gibt alſo $m^2 + 3 = 39 = 13 \cdot 3$; ſezt man daher den Werth von z' in die obige Gleichung, und dividirt mit 13, ſo findet ſich

$$r^2 = 3s^2 - 2 \cdot 6 \cdot s \cdot s' + 13(s')^2.$$

Da nun hier der Coefficient 3 von s^2 weder ein Quadrat noch kleiner als der von $(s')^2$ iſt, ſo ſetze man (§. 54) in der vorhergehenden Gleichung $s = \mu s' + s''$, wodurch

$$r^2 = 3(s'')^2 - 2(6 - 3\mu)s's'' + (3\mu^2 - 2 \cdot 6\mu + 13)(s')^2$$

wird.

Man beſtimme μ alſo, daß $6 - 3\mu$ nicht $> \frac{3}{2}$, hieraus erhellet, daß $\mu = 2$ geſezt werden müſſe, woraus $6 - 3\mu = 0$ wird, und die obige Gleichung verwandelt ſich demnach in

$$r^2 = 3(s'')^2 + (s')^2,$$

welche, wie leicht zu ſehen, auf die verlangte Form gebracht iſt, weil der Coefficient des Quadrats einer der beiden unbeſtimmten Gröſſen, nemlich der des zweiten Glieds, ebenfalls ein Quadrat iſt. Um alſo die einfachſte Auflöſung zu bekommen, ſey $s'' = 0$, $s' = 1$; alſo $r = 1$; mithin $s = \mu = 2$ und daher $y' = \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$, welcher Werth aber mit 2 multiplicirt werden muß, alſo $y' = 1$; folglich, wenn man immer rükwärts

geht, $\frac{q'}{p} = 1$, alſo $q' = p$; alſo wird

$$-12p^2 = (-12q + 41q')^2 - 13(q')^2$$
$$= (-12q + 41p)^2 = p^2, \text{ alſo}$$
$$-12q + 41p = p, \text{ woraus } 12q = 40p,$$

mithin $y = \frac{q}{p} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$; da aber der Werth von y noch durch 2 getheilt werden muß, ſo iſt $y = \frac{5}{3}$, und diß wird die Wurzel aus $7 + 15x + 13x^2$ ſeyn. Sezt man alſo dieſen Werth $= \frac{25}{9}$, und löſet dieſe Gleichung nach den bekannten Regeln auf, ſo erhält man endlich $x = -\frac{19}{39}$ oder $= -\frac{2}{3}$.

Man hätte auch $-12q + 41p = -p$ ſeßen können; woraus $y = \frac{q}{p} = \frac{21}{6}$ alſo der eigentliche Werth für $y = \frac{21}{12}$, mithin $7 + 15x + 13x^2 = (\frac{21}{12})^2$ und alſo $x = -\frac{25}{12}$ oder $= -\frac{3}{4}$ gefunden worden wäre.

Wollte man noch andre Werthe für x haben, ſo müßte man noch mehrere Auflöſungen von

$$r^2 = 3(s'')^2 + (s')^2$$

zum Grunde legen, welches nach den bekannten Methoden geſchehen kann. Man kann aber auch hier diejenige Methode anwenden, die im II. Th. K. V. erklärt worden iſt, und aus einem einzigen bekannten Werthe für x unzälige andre finden lehrt.

Anmerkung.

§. 57.

Geſezt der Ausdruk $a + bx + cx^2$ werde $= g^2$ wenn $x = f$ geſezt wird; ſo daß alſo $a + bf + cf^2 = g^2$, und mithin $a = g^2 - bf - cf^2$ iſt; ſo wird eben dieſer

Ausdruk, wenn ſtatt a der für dieſe Gröſſe ſo eben gefundene Werth darinn ſubſtituirt wird,

$$g^2 + b(x-f) + c(x^2-f^2)$$

Man nehme nun $g + m(x-f)$ als die Quadratwurzel dieſes Ausdruks an, wo m eine unbeſtimmte Zal bedeutet, ſo iſt

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2) = g^2+2mg(x-f) + m^2(x-f)^2$$

und alſo

$$x = \frac{fm^2-2gm+b+cf}{m^2-c.}$$

woraus erhellet, daß dieſer Ausdruk, wegen der unbeſtimmten Gröſſe m, alle mögliche Werthe von x, wodurch obige Formel ein Quadrat wird, in ſich begreife. Denn, welches auch die Quadratzal ſeyn mag, der dieſe Formel gleich iſt, ſo kann doch ihre Wurzel immer durch $g+m(x-f)$ vorgeſtellt werden, wenn x der gehörige Werth beigelegt wird. Wenn alſo, nach der oben erklärten Methode, ein Werth für x gefunden worden, ſo ſey derſelbe = f, und die erhaltene Wurzel = g, und dann erhält man durch die gegenwärtige Formel alle andre mögliche Werthe für x.

In dem vorhergehenden Beiſpiel war $y = \frac{5}{3}$, und $x = -\frac{2}{3}$, man ſetze alſo $g = \frac{5}{3}$, und $f = -\frac{2}{3}$, woraus

$$x = \frac{19-10m-2m^2}{3(m^2-13)}$$

erhalten wird, welches demnach der allgemeine Ausdruk aller rationalen Werthe von x iſt, welche die Gröſſe $7+15x+13x^2$ in ein Quadrat verwandeln.

2. Beiſpiel.

§. 58.

Man ſoll einen rationalen Werth für y finden, der $23y^2 - 5$ zu einem Quadrat macht.

Da 23 und 5 durch keine Quadratzal theilbar ſind, ſo iſt keine Reduction mit dieſen Coefficienten vorzunehmen. Wenn alſo $y = \frac{p}{q}$ geſezt wird, ſo muß $23p^2 - 5q^2$ ein Quadrat z^2 werden, ſo daß $23p^2 = z^2 + 5q^2$ iſt. Es ſey daher $z = nq - 23q'$ wo für n eine ganze Zal geſezt werden muß, die nicht $> \frac{23}{2}$ und zugleich ſo iſt, daß $5 + n^2$ mit 23 theilbar werde. Aber dieſe Zal n iſt $= 8$, woraus $n^2 + 5 = 23 \cdot 3$ folgt, und dieſer Werth iſt der einzige, der die geſuchten Erforderniſſe hat. Man ſetze alſo $8q - 23q'$ ſtatt z in die obige Gleichung, und dividire dieſelbe durchgängig durch 23, ſo erhält man dieſe:

$$p^2 = 3q^2 - 2 \cdot 8qq' + 23(q')^2,$$

in welcher der Coefficient 3 bereits kleiner, als der Werth 5 von B iſt, (wobei von den Zeichen abſtrahirt wird).

Man multiplicire daher die ganze Gleichung durch 3, woraus

$$3p^2 = (3q - 8q')^2 + (5q')^2$$

entſpringt, ſo, daß wenn $\frac{q'}{p} = y'$ geſezt wird, der Ausdruk $-5(y')^2 + 3$ ein Quadrat werden muß, wo übrigens die Coefficienten 5 und 3 keine weitere Reduction geſtatten.

Es ſey alſo $y' = \frac{r}{s}$ (r und s ſeyen unter ſich Primzalen; denn q und p können es auch nicht ſeyn). Folglich muß $-5r^2+3s^2$ ein Quadrat werden. Die Wurzel davon heiſſe z', mithin

$$= sr^2 = (z')^2 - 3s^2.$$

Es ſey nun $z' = ms - 5s'$, wo m eine ganze Zal ſeyn muß, die nicht $> \frac{5}{2}$ und zugleich ſo iſt, daß m^2-3 durch 5 theilbar wird. Aber diß iſt unmöglich, denn weder $m=1$, noch $m=2$ leiſten Genüge, weil m^2-3 im erſten Fall $=-2$ und im andern $=-1$ wird. Man kann alſo hieraus ſchlieſſen, daß diß Problem nicht aufgelößt, und alſo der Ausdruk $23y^2-5$ unmöglich zu einem Quadrat gemacht werden könne, welche Werthe man auch ſtatt y ſetzen mag.

Zuſaz.

§. 59.

Wenn irgend eine Gleichung vom zweiten Grad mit zwei unbekannten Gröſſen gegeben iſt, wie

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0$$

und diejenige rationale Werthe von x und y geſucht werden ſollen, welche dieſelbe auflöſen, wenn ſie anders dergleichen hat, ſo kann diß vermittelſt der ſo eben erklärten Methode geſchehen; denn, wenn man y in x ausdrükt, ſo findet ſich

$$2fy+ex+c=\sqrt{((c+ex)^2-4f(a+bx+dx^2))}$$

oder, wenn $\alpha = c^2-4af$, $\beta = 2ce x - 4bf$, und $\gamma = e^2-4df$ geſezt wird,

$$2fy+ex+c=\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$$

ſo daß alſo alles darauf ankommt, einen Werth von

x zu finden, wodurch $\gamma(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$ rational wird.

Anmerkung.

§. 60.

Ich habe in den Denkwürdigkeiten der Akademie der Wissenschaften von Berlin im Jahr 1767 eben diese Materie, wiewol nach einer etwas verschiedenen Methode, abgehandelt, und glaube der erste gewesen zu seyn, der die unbestimmten Probleme des zweiten Grads auf eine direkte Art, und ohne daß man nöthig hat, vorher einen Werth zu errathen, auf zulösen lehrte. Sollte der Leser diese Materie gründlicher zu wissen begehren, so will ich ihn auf die obenangeführten Abhandlungen verwiesen haben, wo er überdiß neue und merkwürdige Untersuchungen finden wird, die sich auf das Problem beziehen, ein n in ganzen Zalen zu finden, so daß $n^2 - B$ mit A theilbar wird, wo A und B gegebene Grössen sind. *)

Man findet auch in den Abhandlungen der Jahrgänge 1770 ꝛc. Untersuchungen über die Form der Theiler derjenigen Zalen, die in $z^2 - Bq^2$ enthalten sind, so daß man aus der Form von A öfters die Unmöglichkeit der Gleichung $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ oder $Ay^2 + B =$ einen Quadrat, bestimmen kann. (§. 52.)

Legendre

*) Man sehe auch hierüber die 5te Abhandlung des Anhangs zu diesem Werke, worinn das Problem von $\frac{x^2-B}{A}$ auf das vollständigste aufgelöst ist.

Anm. d. Ueb.

Legendre hat ſich nach dieſem in der oben §. 47 angeführten Abhandlung damit beſchäftiget, die allgemeinen Bedingungen der Möglichkeit oder Unmöglichkeit der unbeſtimmten Gleichungen vom zweiten Grad ausfündig zu machen, und iſt dabei auf den merkwürdigen Lehrſaz gerathen, daß die Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$, in welcher a, b, c bejahte Zalen vorſtellen, die unter ſich Primzalen ſind, und keine quadratiſche Faktoren haben, auflösbar iſt, wenn man drei ganze Zalen λ, μ, ν finden kann, die ſo ſind, daß die drei Gröſſen

$$\frac{a\lambda^2 - b}{c} \qquad \frac{c\mu^2 - b}{a} \qquad \frac{c\nu^2 - a}{b}$$

ganze Zalen ſind.

Sechstes Kapitel.

Ueber die doppelten und dreifachen Gleichheiten.

§. 61.

Da die doppelten und dreifachen Gleichheiten in der diophanteiſchen Analyſis von ſo groſſem Nutzen ſind, ſo will ich dieſelben um ſo mehr mit ein paar Worten berühren, als jener groſſe Geometer und ſeine Commentatoren beſondere Regeln zur Auflöſung derſelben gegeben haben.

Wenn eine Formel, die eine oder mehrere unbekannte Gröſſen enthält, einer vollkommnen Potenz, z. B. einem Quadrat, einem Cubus ꝛc. gleichgemacht werden ſoll, ſo heißt diß in der diophanteiſchen Analyſis eine einfache Gleichheit.

Wenn aber von zwei Formeln, die entweder eine oder mehrere unbekannte Gröſſen enthalten, jede einzelne einer vollkommnen Potenz gleich gemacht werden ſoll, ſo heißt diß eine doppelte Gleichheit, u. ſ. w.

Bisher haben wir geſehen, wie man einfache Gleichheiten auflöſen könne, wenn die unbekannte Gröſſe den zweiten Grad nicht überſteigt, und die gegebene Potenz die zweite, d. i. ein Quadrat iſt.

Nun

Nun wollen wir zeigen, wie die doppelten und dreifachen Gleichheiten eben dieſer Potenzen behandelt werden müſſen.

§. 62.

Geſezt, man habe folgende doppelte Gleichheit:

$a + bx =$ einem Quadrat,
$c + dx =$ einem Quadrat,

wo alſo x in beiden Gleichungen in der erſten Potenz iſt.

Man ſeze

$$a + bx = t^2,$$
$$c + dx = u^2$$

und eliminire x aus dieſen beiden Gleichungen, ſo findet ſich

$$ad - bc = dt^2 - bu^2;$$

und

$$(dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)\,d;$$

Die ganze Schwierigkeit beruht alſo darauf, einen rationalen Werth u zu finden, ſo daß

$$dbu^2 + ad^2 - bcd$$

ein Quadrat werde. Dieſe einfache Gleichheit kann aber durch die oben erklärte Methode aufgelöſt werden, und aus u findet ſich ſodann

$$x = \frac{u^2 - c}{d}$$

Wäre die doppelte Gleichheit dieſe:

$ax^2 + bx =$ einem Quadrat
$cx^2 + dx =$ einem Quadrat

ſo müßte man $x = \frac{1}{x'}$ ſezen, und ſodann beide Formeln

meln mit $(x')^2$ multipliciren, wodurch sie sich in folgende verwandelten:

$a + bx^1 =$ einem Quadrat,
$c + dx^1 =$ einem Quadrat,

welche den vorhergehenden ähnlich sind.

Es lassen sich auch allgemein alle diejenigen doppelten Gleichheiten auflösen, wo die unbekannte Grösse in allen Gliedern vorkommt, wenn sie anders den zweiten Grad nicht übersteigt: Aber ganz anders verhält sich die Sache, wenn die Gleichheiten von dieser Form sind:

$a + bx + cx^2 =$ einem Quadrat
$\alpha + \beta x + \gamma x^2 =$ einem Quadrat

Denn, wenn die erstere durch unsre Methode aufgelößt wird, und f der Werth von x ist, welcher $a + bx + cx^2 = g^2$ macht, so ist allgemein (nach §. 57.)

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c}$$

Sezt man aber diesen Werth für x in die zweite Gleichheit, und multiplicirt hernach mit $(m^2 - c)^2$, so muß folgende Gleichheit aufgelößt werden:

$\alpha(m^2-c)^2 + \beta(m^2-c)(fm^2 - 2gm + b + cf)$
$+ \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2 =$

einem Quadrat, in welcher Gleichung die unbekannte Grösse m auf den vierten Grad steigt.

Man hat aber noch keine allgemeine Methode für die Auflösung dieser Gleichungen, und alles, was man thun kann, besteht darinn, mehrere Auflösungen aus einer einzigen, die bekannt ist, herzuleiten. (Man sehe das 9te Kap. des 2ten Theils.)

§. 63.

§. 63.

Wenn man die dreifache Gleichheit hat

$$\left.\begin{array}{l} ax + by \\ cx + dy \\ hx + ky \end{array}\right\} = \text{einem Quadrat.}$$

so sey $ax + by = t^2$, $cx + dy = u^2$, und $hx + ky = f^2$, eliminirt man nun x aus diesen drei Gleichungen, so ergibt sich

$$(ak - bh)\,u^2 - (ck - dh)\,t^2 = (ad - cb)\,f^2$$

und wenn also $\frac{u}{t} = z$ gesezt wird, so besteht die ganze Schwierigkeit darinn, daß

$$\frac{ak - bh}{ad - cb}\,z^2 - \frac{ck - dh}{ad - cb}$$

= einem Quadrat werde, welches durch unsre allgemeine Methode geschehen kann.

Aus dem bekannten z findet sich sodann $u = tz$

$$x = \frac{d - bz^2}{ad - cb}\,t^2 \text{ und}$$

$$y = \frac{az^2 - c}{ap - cb}\,t^2.$$

Enthielte aber die dreifache Gleichheit nur eine einzige veränderliche Grösse, so erhielte man zulezt eine Gleichheit, wo die unbekannte Grösse auf den vierten Grad stiege.

Dieser Fall kann unmittelbar aus dem vorhergehenden hergeleitet werden, wenn man $y = 1$ sezt, so daß also

$$\frac{az^2 - c}{ad - cb} = 1, \text{ und mithin}$$

az^2

$\frac{az^2 - c}{ad - cb}$ = einem Quadrad seyn muß.

Wenn aber f ein Werth von z ist, der die Bedingung erfüllt, und der Kürze wegen $\frac{ak - bh}{ad - cb} = e$ gesezt wird, so ist allgemein (§. 56.)

$$z = \frac{fm^2 - 2gm + ef}{m^2 - e}$$

Wird nun dieser Werth von z in die lezte Gleichheit gesezt, und durchaus mit $(m^2 - e)^2$ multiplicirt, so muß

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb}$$

= einem Quadrat seyn, wo also die unbekannte Grösse m auf den vierten Grad steigt.

Sieben-

Siebentes Kapitel.

Direkte und allgemeine Methode, alle Werthe von y in ganzen Zalen zu bestimmen, wodurch $\sqrt{(Ay^2+B)}$ rational gemacht werden kann, wenn A und B gegebene ganze Zalen bedeuten; wie auch alle mögliche Auflösungen der unbestimmten Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen in ganzen Zalen zu finden.

Zusaz zum sechsten Kapitel.

§. 64.

Obschon durch die Methode des 5ten Kapitels allgemeine Formeln gefunden werden können, die alle rationale Werthe von y erhalten, wodurch $Ay^2 + B$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; so sind dieselben doch von keinem Nuzen, wenn für y nur ganze Zalen gesucht werden. Daher wollen wir hier noch eine besondre Methode mittheilen, das Problem für den Fall, da y eine ganze Zal seyn solle, aufzulösen.

Es sey also $Ay^2 + B = x^2$, und da A und B, so wie auch y hier ganze Zalen vorstellen sollen, so

erhellet, daß auch x eine ganze Zal seyn müsse; folglich wird folgende Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B$$

in ganzen Zalen aufgelößt werden müssen.

Hier ist zu bemerken, daß, wenn B durch keine Quadratzal theilbar ist, y unmöglich mit B einen gemeinschaftlichen Theiler haben könne. Denn, gesezt y und B hätten den gemeinschaftlichen Factor α, so daß $y = \alpha y'$ und $B = \alpha B'$ wäre, so würde

$$x^2 = A\alpha^2 (y')^2 + \alpha B',$$

und mithin x^2 durch α theilbar seyn. Da aber α weder ein Quadrat, noch durch irgend ein Quadrat theilbar ist, (nach der Voraussetzung) indem diese Grösse ein Factor von B ist, so muß x durch α theilbar seyn. Wenn daher $x = \alpha x'$ gesezt wird, so ist

$$\alpha^2 (x')^2 = \alpha^2 A(y')^2 + \alpha B', \text{ oder}$$
$$\alpha (x')^2 = \alpha A (y')^2 + B',$$

woraus erhellet, daß B' ebenfalls durch α theilbar seyn müßte, welches gegen die Voraussetzung ist.

Also nur wenn B quadratische Factoren enthält, kann y einen gemeinschaftlichen Theiler mit B haben, und es ist leicht aus vorhergehendem Beweis zu ersehen, daß diß gemeinschaftliche Maas von y und B, nichts anders als die Wurzel eines der quadratischen Factoren von B seyn könne, und die Grösse x ebendasselbe gemeinschaftliche Maas haben müsse, so daß die ganze Gleichung durch das Quadrat dieses gemeinschaftlichen Theiler von x, y und B theilbar ist.

Hieraus schliesse ich

1) daß, wenn B durch keine Quadratzal theilbar ist, y und B unter sich Primzalen seyn müssen.

2)

2) Daß, wenn B nur durch einen einzigen quadratiſchen Factor α^2 theilbar iſt, y entweder mit B keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, oder durch α theilbar ſeyn könne; diß gibt zwei Fälle, die beſonders unterſucht werden müſſen. Im erſten Falle löſe man $x^2 - Ay^2 = B$ ſo auf, daß x und B unter ſich als Primzalen angenommen werden; im zweiten aber hat man die Gleichung $x^2 - Ay^2 = B'$ aufzulöſen, wo $B' = \sqrt{\frac{B}{\alpha^2}}$ und B' und y ebenfalls unter ſich Primzalen ſind. Zulezt müſſen ſodann die gefundenen Werthe von y und x mit α multiplicirt werden, um diejenigen zu erhalten, die der vorgegebenen Gleichung Genüge leiſten.

Iſt aber

3) B durch zwei verſchiedene Quadrate α^2 und β^2 theilbar, ſo ſind drei Fälle zu betrachten. Im erſten löſe man die Gleichung $x^2 - Ay^2 = B$ unter der Bedingung auf, daß y und B als Primzalen unter ſich betrachtet werden; im zweiten ſey $x^2 - Ay^2 = B^I$, wo $B^I = \frac{B}{\alpha^2}$ iſt, und y und B^I ebenfalls unter ſich Primzalen ſind, und multiplicire hernach die gefundenen Werthe von x und y mit α; im dritten ſeze man $x^2 - Ay^2 = B''$, wo $B'' = \sqrt{\frac{B}{\beta^2}}$ iſt, und y und B'' unter ſich Primzalen ſind, und multiplicire hernach die Werthe von x und y mit β.

Alſo müſſen

4) ſo viel verſchiedne Gleichungen aufgelöſt werden,

den, als B verschiedene quadratische Faktoren hat; aber alle diese Gleichungen sind von der Form $x^2 - Ay^2 = B$, und y und B werden immer unter sich Primzalen seyn.

§. 65.

Man betrachte demnach die allgemeine Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

wo y und B unter sich Primzalen sind; und da x und y ganze Zalen vorstellen, so muß also $x^2 - Ay^2$ durch B theilbar seyn.

Zu diesem Ende setze man nach der im 4ten K. §. 48. erklärten Methode,

$$x = ny - Bz,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

woraus erhellet, daß das Glied $(n^2 - A)y^2$ durch B theilbar seyn müsse, weil alle andre es für sich selbst sind. Da nun y und B unter sich Primzalen vorstellen, so muß also $n^2 - A$ durch B theilbar seyn; so daß wenn $\frac{n^2 - A}{B} = C$ gesezt, und alles durch B dividirt wird, die Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

herauskommt. Diese Gleichung aber ist in sofern einfacher, als die vorgegebene, weil die zweite Seite derselben der Einheit gleich ist.

Man suche also die Werthe von n, die so sind, daß $n^2 - A$ durch B theilbar wird; und um diesen Endzwek zu erreichen, ist es (nach §. 47.) schon genug, anstatt n alle ganze bejahte oder verneinte Zalen zu sezen, die nicht $> \frac{B}{2}$ sind. Findet sich nun unter

diesen

dieſen keine, welche Gnüge leiſtet, ſo läßt ſich ſogleich ſchlieſſen, daß $n^2 - A$ nicht durch B theilbar ſey, und alſo die vorgegebene Gleichung unmöglich in ganzen Zalen aufgelöst werden könne.

Finden ſich aber auf dieſem Wege ein oder mehrere Werthe, die die Bedingung erfüllen, ſo nehme man einen nach dem andern für n, und diß wird dann eben ſo viele verſchiedene Gleichungen geben, die man beſonders vornehmen muß, und deren jede auf eine oder mehrere Auflöſungen führen wird.

Was aber diejenigen Werthe von n anbetrift, die $> \frac{B}{2}$ ſind, ſo kann man ſie ganz beiſeite ſetzen, weil die Gleichungen, die ſie gäben, nicht von denen verſchieden ſeyn würden, die aus den Werthen von n, die $< \frac{B}{2}$ ſind, hergeleitet werden, wie wir bereits §. 52. gezeigt haben.

Da indeſſen die Bedingung, aus welcher n beſtimmt wird, nur dieſe iſt, daß $n^2 - A$ durch B theilbar ſey, ſo erhellet hieraus, daß jeder Werth n ſowol bejaht als verneint ſeyn könne; ſo daß man alſo nur alle natürliche Zalen, die nicht $> \frac{B}{2}$ ſind, probiren, und die gefundenen Werthe von n ſodann bejaht und verneint nehmen darf.

Wir haben anderswo Regeln gegeben, die Erforſchung der Werthe von n zu erleichtern, und eine groſſe Anzal derſelben in ſehr vielen einzelnen Fällen zu beſtimmen. (Man ſehe die Denkwürdigkeiten

der Berliner Akademie vom Jahr 1767, Seite 194 und 274.

Auflösung der Gleichung $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$. in ganzen Zalen.

Diese Gleichung kann durch zwei verschiedene Methoden aufgelößt werden, welche wir jezt abhandeln wollen.

Erste Methode.

§. 66.

Da die Grössen C, n, B ganze Zalen sind, so wie auch die unbestimmten y und z, so ist klar, daß die Grösse $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ nothwendig immer einer ganzen Zal gleich seyn müsse; folglich wird die Einheit der kleinste Werth seyn, dessen sie fähig ist, wenn anders sie nicht Null wird, welches aber nur dann möglich ist, wann diese Grösse in zwei rationale Factoren aufgelößt werden kann. Da aber dieser Fall keine Schwierigkeit hat, so seßen wir ihn einstweilen beiseite. Die Frage beruhet demnach darauf, solche Werthe für y und z zu finden, welche die gegebene Grösse so klein als möglich machen. Ist das erhaltene Minimum der Einheit gleich, so ist das Problem aufgelößt, wo nicht, so läßt sich sicher schliessen, daß keine Auflösung desselben in ganzen Zalen möglich sey. So ist also diß Problem nur ein besondrer Fall des im 3ten Kapitel 2ten §. aufgelösten Problems, und seine Auflösung kann also aus der am angezeigten Orte gegebenen hergeleitet werden. Da aber hier $(2n)^2 - 4BC = 4A$, (§. 65.) ist, so muß man

man zwei Fälle unterſcheiden, je nachdem nemlich A bejaht oder verneint iſt.

Erſter Fall, wenn $n^2 - BC = A, < o$ iſt.

§. 67.

Nach der §. 32. erklärten Methode muß $\frac{n}{C}$ bejaht genommen, in einem fortlaufenden Bruch verwandelt werden, welches nach §. 4. geſchehen kann. Hierauf bilde man nach den Formeln des §. 10. eine Reihe von Brüche, die gegen $\frac{n}{C}$ convergiren, und ſetze ihre Zäler der Reihe nach anſtatt y, und die correſpondirenden Nenner anſtatt z. Iſt nun die vorgegebene Formel in ganzen Zalen auflösbar, ſo finden ſich auf dieſe Art diejenigen Werthe von y und z, welche Genüge leiſten; und umgekehrt auch, wenn unter den gefundenen Zalen keine die Bedingung erfüllt, ſo iſt diß ein ſicheres Zeichen, daß die gegebene Gleichung in ganzen Zalen unmöglich aufgelöst werden könne.

Zweiter Fall, wenn $n^2 - BC = A, > o$ iſt.

§. 68.

Hier bediene man ſich der Methode des §. 33 ꝛc. Alſo in Rükſicht auf $E = 4A$, iſt zuerſt die Gröſſe (§. 39.)

$$a = \frac{n \pm \nu A}{C}$$

zu betrachten, in welcher die Zeichen ſowol von n (welche Gröſſe, wie wir geſehen, ſowol bejaht, als verneint

seyn kann,) als auch von $\sqrt{A}$ so bestimmt werden müssen, daß jene Grösse a bejaht werde; sodann stelle man folgende Rechnung an:

$$\begin{array}{llll} Q^{\circ} & P^{\circ} & \mu & \\ \| & \| & < & \\ - & C. & - & \dfrac{Q^{\circ}+\sqrt{A}}{P^{\circ}} \\ n. & & & \\ \| & \| & < & \\ \mu\, P^{\circ}+Q^{\circ} & P_{I} & \mu' & \dfrac{Q_{I}+\sqrt{A}}{P_{I}} \\ \| & \| & < & \\ \mu' P_{I}+Q_{I} & P_{II} & \mu'' & \dfrac{Q_{II}+\sqrt{A}}{P_{II}} \\ \| & \| & < & \\ \mu'' P_{II}+Q_{II} & P_{III} & \mu''' & \dfrac{Q_{III}+\sqrt{A}}{P_{III}} \\ Q''' & \dfrac{(Q^{II})^{2}-A}{P_{II}} & & \end{array}$$

und setze diese Reihen so weit fort, bis in der ersten und zweiten zwei correspondirende gleiche Glieder wieder

wieder zum Vorſchein kommen; wird nun unter den Gliedern der zweiten Reihe P^0, P^I, P^{II} ꝛc. eines gefunden, das der bejahten Einheit gleich iſt, ſo gibt daſſelbe die Auflöſung der vorgegebenen Gleichung, und die Werthe von y und z werden die correſpondirenden Glieder der beiden nach den Formeln des 25. §. berechneten Reihen p^0, p^I, p^{II}, p^{III} ꝛc. und q^0, q^I, q^{II}, q^{III} ꝛc. ſeyn. Iſt aber unter P^0, P^I, P^{II} ꝛc. kein Glied der bejahten Einheit gleich, ſo läßt ſich mit Zuverläſſigkeit daraus ſchlieſſen, daß die vorgegebene Gleichung in ganzen Zalen nicht aufgelößt werden könne. (Man ſehe das Beiſpiel des §. 40.)

Dritter Fall, wenn A = einem Quadrat iſt.

§. 69.

In dieſem Fall wird $\sqrt{A}$ rational, und die Gröſſe $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ kann in zwei rationale Faktores zerlegt werden; denn dieſe Gröſſe iſt nichts anders als

$$\frac{(Cy - nz)^2 - Az^2}{C},$$

welche, wenn $A = a^2$ geſetzt wird, unter dieſer Form

$$\frac{(Cy \pm (n+a)z)(Cy \pm (n-a)z)}{C}$$

vorgeſtellt werden kann.

Da aber $n^2 - a^2 = AC = (n+a)(n-a)$, ſo muß das Produkt von $n+a$ in $n-a$, folglich einer der beiden Faktoren $n+a$ oder $n-a$ durch einen der Theiler von C theilbar ſeyn, und der andre durch den andern. Es ſey alſo $C = bc$, $n+a = fb$,

und $n - a = gc$, wo f und g ganze Zalen sind, so wird

$$\frac{(Cy \pm (n+a)z)\ (Cy \pm (n-a)z)}{C} = (cy \pm fz)\ (by \pm gz).$$

Weil aber diese beiden Faktores ganze Zalen sind, so ist klar, daß ihr Produkt $= 1$ seyn werde, wie die Bedingung erfordert, wenn jeder einzelne derselben $= \pm 1$ ist. Es sey also $cy \pm fz = \pm 1$. Und hieraus bestimme man y und z. Finden sich nun für diese Grössen ganze Zalen, so ist die Gleichung aufgelößt, wo nicht, so ist eine Auflösung in ganzen Zalen unmöglich.

Zweite Methode.

§. 70.

Man nehme mit der Formel $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ ähnliche Verwandlungen vor, wie diejenigen, die wir §. 54. angezeigt haben, so behaupte ich, man werde immer auf eine solche kommen, wie

$$L\xi^2 - 2M\xi\Psi + N\Psi^2$$

wo die Grössen L, M, N ganze Zalen sind, die von den gegebenen Grössen C, B, n abhangen, so daß

$$M^2 - LN = n^2 - CB = A$$

und überdiß $2M$ weder $> L$, noch $> N$ ist, (wo von den Zeichen abstrahirt wird.) Die Zalen ξ und Ψ werden ebenfalls ganze Zalen seyn, die aber von den unbestimmten Grössen y und z abhangen.

Um diß zu beweisen, sey z. B. $C < B$, und die Formel, von der die Rede ist, werde also vorgestellt:

$$B'y^2 - 2nyy' + B(y')^2,$$

wo

wo $C = B'$, und $z = y'$ geſezt wird. Iſt nun $2n$ nicht $>$ als B', ſo hat dieſe Formel bereits an und für ſich ſelbſt die erforderlichen Bedingniſſe; Iſt aber $2n > B'$, ſo ſetze man $y = my' + y''$, und ſubſtituire dieſen Werth in den vorhergehenden Ausdruk, welcher ſich in folgenden verwandeln wird

$$B'(y'')^2 - 2n'y''y' + B''(y')^2,$$

wo $n' = n - mB'$, und

$B'' = m^2B' - 2mn + B = \frac{(n')^2 - A}{B'}$ *) iſt.

Da aber m unbeſtimmt iſt, ſo kann man dieſe Zal, wenn man ſie als ganz annimmt, immer ſo beſtimmen, daß n' oder $n - mB'$ nicht $> \frac{B'}{2}$ wird, und in dieſem Falle wird alſo $2n'$ nicht $> B'$ ſeyn. Iſt nun auch $2n'$ nicht $> B''$, ſo wird die obige Gleichung

$$B'(y'')^2 - 2n'y''y' + B''(y')^2$$

ſo ſeyn, wie die Bedingung erfordert.

Iſt

*) Es iſt $m^2B' - 2mn + B = \frac{m^2(B')^2 - 2mnB' + B'B}{B'}$

$= \frac{m^2(B')^2 - 2mnB' + n^2 - A}{B'}$,

(weil $\frac{n^2 - A}{B'} = C = B'$) oder $= \frac{(n - mB')^2 - A}{B'}$,

mithin auch $= \frac{(n')^2 - A}{B'}$.

Anm. d. Ueb.

Iſt aber $2n' > B''$, ſo fahre man weiter fort, und ſetze $y' = m' y'' + y'''$, welches folgende Verwandlung gibt:

$$B'''(y'')^2 - 2n'' y'' y''' + B''(y''')^2$$

wo $n'' = n'' - m' B''$ und

$$B''' = (m')^2 B'' - 2m'n' + B' = \frac{(n'')^2 - A}{B''},$$

Und nun beſtimme man die ganze Zal m' ſo, daß $n' - m' B''$ nicht $> \frac{B''}{2}$, und alſo $2n''$ nicht $> B''$ wird, ſo daß auch hier wiederum die obige Verwandlung die geſuchte Form hat, wenn $2n''$ nicht $> B'''$. Sollte aber $2n'' > B'''$ ſeyn, ſo müßte man von neuem $y^{II} = y^{II} y^{III} + y^{IV}$ ſetzen, ꝛc.

Dieſe Operationen können aber nicht ins Unendliche fortgehen, und die Rechnung muß nothwendig ihre Gränzen haben. Denn $2n > B'$, und $2n'$ nicht $> B'$, folglich $n' < n$. Ferner $2n > B''$, und und $2n''$ nicht $> B''$, alſo iſt $n'' < n'$, u. ſ. w. Mithin bilden n, n', n'' ꝛc. eine abnehmende Reihe ganzer Zalen, welche ſich alſo nicht ins Unendliche erſtrecken kann. Man muß alſo nothwendig auf eine ſolche Formel kommen, in welcher der Coefficient des mittleren Gliedes nicht gröſſer ſeyn wird, als die Coefficienten der äuſſern Glieder, und welcher überdiß die übrigen Eigenſchaften haben wird, die wir oben angezeigt haben; welches aus der Natur der vorgenommenen Verwandlungen ſelbſt klar iſt.

Damit

Damit aber die Verwandlung der Formel

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

in $$L\xi^2 - 2N\xi\Psi + N\Psi^2$$

deſto leichter geſchehe, ſo bezeichne man durch D den gröſſern der beiden äuſſern Coefficienten, und durch D′ den kleineren; ferner durch d diejenige veränderliche Gröſſe deren Quadrat durch D′ multiplicirt iſt, und durch d′ die andre veränderliche Gröſſe, ſo daß die vorgegebene Formel die Geſtalt erhält,

$$D'd^2 - 2ndd' + D(d')^2,$$

wo $D' < D$ iſt. Nun ſtelle man folgende Rechnung an:

$$m = \frac{n}{D^{I}} \qquad n^{I} = n - m\,D^{I} \qquad D^{II} = \frac{(n')^{2} - A}{D^{I}} \qquad d = m\,d^{I} + d^{II}$$

$$m^{I} = \frac{n^{I}}{D^{II}} \qquad n^{II} = n^{I} - m^{I}\,D^{II} \qquad D^{III} = \frac{(n^{II})^{2} - A}{D^{II}} \qquad d^{I} = m^{I}\,d^{II} + d^{III}$$

$$m^{II} = \frac{n^{II}}{D^{III}} \qquad n^{III} = n^{II} - m^{II}\,D^{III} \qquad D^{IV} = \frac{(n^{III})^{2} - A}{D^{III}} \qquad d^{II} = m^{II}\,d^{III} + d^{IV}$$

$$\text{&c.} \qquad \text{&c.} \qquad \text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

Uebrigens

Uebrigens iſt wol zu bemerken, daß das Zeichen $=$, welches nach den Gröſſen m, m′, m″ ꝛc. ſteht, keine abſolute Gleichheit anzeigt, ſondern blos die gröſtmögliche Annäherung, wenn m, m′, m″ ꝛc. ganze Zalen bedeuten; und ich gebrauche blos dieſes Zeichen, weil kein andres ſchikliches vorhanden iſt.

Dieſe Operationen müſſen ſo weit fortgeſezt werden, bis in der Reihe n, n′, n″ ꝛc. ein Glied gefunden wird, z. B. n^ϱ, welches, (wenn wir von den Zeichen abſtrahiren), nicht gröſſer als die Hälfte des correſpondirenden Glieds D^ϱ der Reihe D′, D″, D‴ ꝛc. und auch nicht gröſſer als die Hälfte des folgenden Glieds $D^{\varrho+1}$ iſt. Dann ſeze man $D^\varrho = L$, $n^\varrho = N$, $D^{\varrho+1}$ entweder $= M$ und $d^\varrho = \Psi$, $d^{\varrho+1} = \xi$, oder $D^\varrho = M$, $D^{\varrho+1} = L$ und $d^\varrho = \xi$, $d^{\varrho+1} = \Psi$. In Zukunft aber wollen wir immer annehmen, M bedeute die kleinſte der beiden Zalen D^ϱ und $D^{\varrho+1}$.

§. 71.

Die Gleichung $Cy^2 - 2nyz + Dz^2 = 1$ wird alſo auf dieſe gebracht

$$L\xi^2 - 2N\xi\Psi + M\Psi^2 = 1.$$

wo $N^2 - LM = A$, und $2N$ weder $> L$ noch $> M$ iſt, (wenn von den Zeichen abſtrahirt wird). Da aber M der kleinſte unter den beiden Coefficienten L und M iſt, ſo multiplicire man die ganze Gleichung durch dieſen Coefficienten M, und ſeze überdiß $\upsilon = M\Psi - N\xi$, ſo verwandelt ſie ſich in dieſe:

$$\upsilon^2 - A\xi^2 = M,$$

in

in welcher zwei Fälle unterschieden werden müssen, nemlich je nachdem A bejaht oder verneint ist.

1) Es sey A verneint, und $= -a$, wo a eine bejahte Zal vorstellt, so wird also $\upsilon^2 + a\xi^2 = M$ seyn. Da aber $N^2 - LM = A$, so ist $a = LM - N^2$, woraus erhellet, daß L und M einerlei Zeichen haben müssen; und da auch 2 N weder $> L$, noch $> M$ seyn kann, und mithin N^2 nicht $> \frac{LM}{4}$ ist, so wird a entweder $=$ oder $> \frac{3}{4} ML$; Aber M ist $<$ als L, daher muß um so mehr a = oder $> \frac{3}{4} M^2$, und also M = oder kleiner $\sqrt{\frac{4a}{3}}$, also auch $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$ seyn.

Hieraus folgt, daß die Gleichung $\upsilon^2 + a\xi^2 = M$, (wenn υ und ξ ganze Zalen seyn sollen) nicht bestehen könne, wenn nicht $\xi = 0$, und also $\upsilon^2 = M$ werde, welches demnach erfordert, daß M eine Quadratzal sey.

Gesezt also, M sey $= \mu^2$, so hat man $\xi = 0$, $\upsilon = \pm\mu$; da aber $\upsilon = M\Psi - N\xi$, so ergibt sich hieraus $\mu^2\Psi = \pm\mu$, und folglich $\Psi = \pm\frac{1}{\mu}$. Aber nach der Bedingung muß Ψ eine ganze Zal, und demnach nothwendig μ der Einheit gleich seyn. Folgich ist M = 1.

Hieraus folgt also, daß die vorgegebene Gleichung unmöglich in ganzen Zalen aufgelößt werden könne, wenn M nicht einer bejahten Einheit

Einheit gleich gefunden wird. Ist aber dieser lezte Fall, so seze man $\xi = 0$, $\Psi = 1$; und aus diesen Werthen lassen sich sodann, wenn man rükwärts gehet, die Werthe von z und y finden.

Diese Methode ist in der Hauptsache einerlei mit derjenigen, die wir §. 67. vorgetragen haben; sie hat aber in sofern einen Vorzug vor dieser, weil hier nicht wie dort erst Proben mit den verschiedenen Werthen angestellt werden müssen.

2) Wenn A bejaht ist, so ist $A = N^2 - LM$. Aber da N^2 nicht $> \frac{LM}{4}$ seyn kann, so kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht $-LM$ bejaht ist, d. i. wenn nicht L und M verschiedene Zeichen haben. Also wird A nothwendig entweder $> -LM$, oder wenn $N = 0$ ist, $= -LM$ seyn; mithin ist $-LM$ entweder $=$ oder $< A$, und folglich M^2 entweder $=$ oder $< A$, und daher $M =$ oder $< \sqrt{A}$.

Der Fall $M = \sqrt{A}$ kann aber nur dann statt finden, wenn A ein Quadrat ist, und die sehr leichte Auflösung desselben kann nach der §. 69. erklärten Methode geschehen.

Mithin bleibt nur noch derjenige Fall zu erörtern übrig, wenn A kein Quadrat ist, und in welchem nothwendig $M < \sqrt{A}$ seyn muß: (wo übrigens von den Zeichen von M abstrahirt wird).

Dann aber ist die Gleichung $v^2 - A\xi^2 = M$ in dem Fall des §. 38, und kann folglich durch die von uns angezeigte Methode aufgelößt werden.

Zu diesem Endzwek muß folgende Rechnung angestellt werden:

$$\begin{array}{llll} Q^0 = 0. & Q^I = \mu. & Q^{II} = \mu' P^I + Q^I & \text{ꝛc.} \\ P^0 = 1. & P^I = (Q^I)^2 - A & P^{II} = \frac{(Q^{II})^2 - A}{P^I} & \text{ꝛc.} \\ \mu < \frac{\sqrt{A}}{} & \mu' < \frac{-Q^I - \sqrt{A}}{P^I} & \mu'' < \frac{-Q^{II} + \sqrt{A}}{P^{II}} & \text{ꝛc.} \end{array}$$

Diß

$$\begin{array}{ll} Q^{III} = \mu'' P^{II} + Q^{II} & \text{ꝛc.} \\ P^{III} = \frac{(Q^{III})^2 - A}{P^{II}} & \text{ꝛc.} \\ \mu''' < \frac{-Q^{III} - \sqrt{A}}{P^{III}} & \text{ꝛc.} \end{array}$$

Diß ſetze man fort, bis ſowol in der erſten als in der zweiten Reihe wieder gleiche correſpondirende Glieder zum Vorſchein kommen, oder bis in der Reihe P', P'', P''' ꝛc. ein Glied gefunden wird, das der bejahten Einheit, oder der Gröſſe P° gleich iſt, weil alsdann alle folgende Glieder in jeder der drei Reihen wieder in eben der Ordnung zum Vorſchein kommen müſſen. (§. 37.) Wird in der Reihe P', P'', P''' ꝛc. ein Glied gefunden, das gleich M iſt, ſo iſt das Problem aufgelößt, denn man darf für υ und ξ nur die correſpondirenden Glieder der Reihen p', p'', p''' ꝛc, q', q'', q''' ꝛc. die nach den Formeln des §. 25. berechnet werden, nehmen; und wenn man eben dieſelben Reihen ins Unendliche fortſezt, ſo laſſen ſich für υ und ξ unzählige Werthe finden.

Aus den zwei bekannten Werthen υ und ξ findet ſich ſodann Ψ aus der Gleichung

$$\upsilon = M\Psi - N\xi,$$

welche Gröſſe immer eine ganze Zal ſeyn wird; Aus den Werthen ξ und Ψ, das iſt $d^{\varrho+1}$ und d^ϱ findet man, immer rükwärts gehend, d und d', und endlich y und z. (§. 70.)

Iſt aber in der Reihe P', P'', P''' ꝛc. kein Glied $= M$, ſo kann man ſicher ſchlieſſen, daß es unmöglich ſey, die Gleichung in ganzen Zalen aufzulöſen.

Es iſt nicht überflüſſig, hier zu bemerken, daß, da die Reihe P°, P', P'' ꝛc. ſo wie auch die beiden andern Q°, Q', Q'' ꝛc. und μ, μ', μ'' ꝛc. nur allein von A abhängen, die für einen gegebnen Werth von A vorgenommene Rechnung, bei allen Gleichungen gebraucht werden könne, wo A, d. i. $n^2 - CB$ eben

denselben Werth hat; und aus dieser Ursache verdient diese Methode vor derjenigen des §. 68. den Vorzug, welche für jede Gleichung eine neue Rechnung erfordert.

Wenn A nicht > als 100, so kann hier die §. 41. mitgetheilte Tabelle mit Nutzen gebraucht werden, denn sie enthält für jede γA die Werthe der Glieder der beiden Reihen P^o P', P'', P''' ꝛc. und μ, μ', μ'', μ''' ꝛc. bis eines der Glieder der ersteren = 1. wird, worauf sodann alle folgende Glieder der beiden Reihen wieder in ebenderselben Ordnung zum Vorschein kommen. Durch Hülfe dieser Tabelle läßt sich also leicht beurtheilen, ob die Gleichung $v^2 - A\xi^2 = M$ in ganzen Zalen aufgelößt werden könne, oder nicht?

Aus einer einzigen bekannten Auflösung der Gleichung $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, alle andre mögliche zu finden.

§. 72.

Obschon durch die bisher gegebenen Methoden alle Auflösungen dieser Gleichung gefunden werden können, wenn sie in ganzen Zalen auflößbar ist, so läßt sich doch durch einen leichtern Weg zu ebendemselben Zwecke gelangen, wie wir jezt zeigen wollen.

Die für y und z gefundenen Werthe heissen p und q, so daß also

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1$$

sey; Nun nehme man zwei andre Zalen r und s,

die

die ſo ſind, daß $ps - qr = 1$ iſt, (welches immer möglich iſt, weil p und q unter ſich Prinzalen ſeyn müſſen); Hierauf mache man

$$y = pt + ru, \quad \text{und} \quad z = qt + su,$$

wo t und u neue unbeſtimmte Gröſſen ſind, und ſeze dieſe Ausdrücke in die Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1.$$

Iſt nun der Kürze halber

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2$$
$$Q = Cpr - n(ps + qr) + Bqs$$
$$R = Cr^2 - 2nrs + Bs^2$$

ſo verwandelt ſie ſich in dieſe:

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1.$$

Aber nach der Vorausſezung iſt $P = 1$, und wenn überdiß ϱ und σ diejenigen zwei Werthe von r und s ſind, welche der Gleichung $ps - qr = 1$ Genüge leiſten, ſo wird (nach §. 42.) allgemein

$$r = \varrho + mp \text{ und } s = \sigma + mq$$

ſeyn, wo m jede ganze Zal vorſtellt. Sezt man aber dieſe Werthe in den Ausdruk für Q, ſo wird

$$Q = Cp\varrho - n(p\sigma + q\varrho) + Bq\sigma + mP.$$

Da nun $P = 1$, ſo kann $Q = 0$ gemacht werden, wenn

$$m = -Cp\varrho + n(p\sigma + q\varrho) - Bq\sigma$$

genommen wird.

Indeſſen kann, nach den gehörigen Subſtitutionen und Reductionen, der Werth $Q^2 - PR$ auf dieſen gebracht werden: $(n^2 - CB)(ps - rq)^2$: ſo daß, da $ps - qr = 1$ iſt, $Q^2 - PR = n^2 - CB = A$ wird. Wenn nun $P = 1$ und $Q = 0$ gemacht wird,

so ist demnach $-R = A$, und also $R = -A$; mithin verwandelt sich die Gleichung

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1$$
$$t^2 - Au^2 = 1;$$

Da aber y, z, p, q, r und s, nach der Voraussetzung, ganze Zalen sind, so ist leicht zu sehen, daß auch t und u ganze Zalen seyn müssen. Denn, wenn ihre Werthe aus den Gleichungen $y = pt + ru$, und $z = qt + su$ entwickelt werden, so findet sich $t = \frac{sy - rz}{ps - qr}$, und $u = \frac{pz - qy}{ps - qr}$.

Aber $ps - qr = 1$: folglich ist

$$t = sy - rz, \text{ und } u = pz - qy.$$

Man hat also die Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

in ganzen Zalen aufzulösen, und jeder Werth von t und u wird neue Werthe für y und z geben.

Man setze nemlich in den allgemeinen Werthen von r und s, den für m gefundenen Ausdruk, so ist

$$r = \varrho(1 - Cp^2) - Bpq\sigma + np(p\sigma + q\varrho)$$
$$s = \sigma(1 - Bq^2) - Cpq\varrho + nq(p\sigma + q\varrho)$$

oder weil

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1.$$
$$r = (Bq - np)(q\varrho - p\sigma) = -Bq + np.$$
$$s = (Cp - nq)(p\sigma - q\varrho) = Cp - nq.$$

Diese Werthe von r und s in den Ausdruk von y und z gesezt, geben allgemein

$$y = pt - (Bq - np)u$$
$$z = qt + (Cp - nq)u.$$

§. 73.

§. 73.

Es kommt also alles auf die Auflösung der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ an.

1) Wenn A verneint ist, so ist klar, daß diese Gleichung in ganzen Zalen nicht bestehen könne, wenn nicht $u = 0$, und $t = 1$ ist, woraus $y = p$ und $z = q$ folgt. Wenn also A eine verneinte Zal ist, so ist die Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

nur einer einzigen Auflösung in ganzen Zalen fähig.

Eben diß gilt auch für den Fall, da A eine bejahte Quadratzal ist, denn, wenn man $A = a^2$ sezt, so ist

$$(t + au)(t - au) = 1;$$

folglich $t + au = \pm 1$, und $t - au = \pm 1$; mithin $2au = 0$; folglich $u = 0$, und also $t = \pm 1$.

2) Ist aber A eine ganze Zal, die kein Quadrat ist, so ist die Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$, einer unendlichen Anzal von Auflösungen in ganzen Zalen fähig, (§. 37.) welche alle durch die oben gegebenen Formeln (§. 71. № 2.)

*) Eine andre, äusserst einfache, Auflösung eben dieses Problems findet man in dem Anhange, unter den Problemen aus der unbestimmten Analytik und zwar Problem 1.; die um so mehr einige Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, als sie aus den wenigstmöglichen Prämissen hergeleitet worden ist.

Anm. d. Ueb.

gefunden werden können. *) Indessen ist es genug, die kleinsten Werthe t und u zu wissen, und nachdem man deshalb in der Reihe P', P'', P''' ꝛc. auf dasjenige Glied gekommen, das der Einheit gleich ist, lassen sich durch die Formeln des §. 25, die correspondirenden Glieder der beiden Reihen p', p'', p''' ꝛc. und q', q'', q''' ꝛc. finden, welches die gesuchten Werthe von t und u seyn werden. Hieraus erhellet, daß eben die Rechnung, wodurch die Gleichung

$$v^2 - A\xi^2 = M$$

aufgelößt wird, auch bei der Auflösung von $t^2 - Au^2 = 1$. gebraucht werden könne.

Wenn A nicht grösser als 100 ist, so sind die Werthe von t und u bereits alle in derjenigen Tabelle berechnet, welche am Ende des 7. Kapitels des Eulerischen Werks angehängt ist, und wo die Zalen a, n und u eben das sind, was wir hier A, t und u genannt haben.

§. 74.

Gesezt nun, t' und u' bezeichnen die kleinsten Werthe von t und u in der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$; Gleichwie aber diese Werthe dazu dienen können, neue Werthe y und z in der Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

zu finden, so können sie auch zur Findung neuer Werthe t und u in der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

gebraucht werden, welche leztere nur ein besonderer Fall von jener ist. Man seze deshalb $C = 1$, und $n = 0$; diß gibt $-B = A$, und hierauf nehme man t und u statt y und z, und t' und u' statt p und

q.

q. Subſtituirt man dieſe Werthe in den allgemeinen Ausdrücken von y und z (§. 72.), und heißt überdiß die dortigen t und u hier T und V, ſo findet ſich allgemein

$$t = Tt' + AVu'$$
$$u = Tu' + Vt'$$

und T und V werden aus der Gleichung

$$T^2 - AV^2 = 1,$$

beſtimmt, welche den vorgegebenen ähnlich iſt.

Geſetzt alſo T ſey $= t'$, und $V = u'$, ſo iſt

$$t = (t)^2 + A(u')^2$$
$$u = t'u' + u't'.$$

Bezeichnet man nun dieſe zweiten Werthe von t und u mit t'' und u'', ſo iſt

$$t'' = (t')^2 + A(u')^2$$
$$u'' = 2t'u'.$$

Dieſe neuen Werthe t'' und u'' laſſen ſich nun wieder ſtatt der erſten t' und u' ſetzen, ſo daß

$$t = Tt'' + AVu''$$

und $u = Tu'' + Vt''$

wo aufs neue $T = t'$, $V = u'$ geſetzt werden kann, woraus

$$t = t't'' + Au'u'', \text{ und } u = t'u'' + u't''$$

wird. So finden ſich alſo neue Werthe für t und u, welche ſeyn werden:

$$t''' = t'\,t'' + Au'\,u'' = t'\left((t')^2 + 3A(u')^2\right)$$
$$u''' = t'u'' + u't'' = u'\left(3(t')^2 + A(u')^2\right)$$

u. ſ. w.

§. 75.

Die vorhergehende Methode lehrt zwar die Werthe von t'', t''' ꝛc. u'', u''' ꝛc. nur nach und nach finden; allein dieſe Unterſuchung läßt ſich leicht allgemein machen. Erſtens iſt

$$t = Tt' + AVu',\ u = Tu' + Vt',$$

woraus

$$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})\ (T \pm V\sqrt{A})$$

hergeleitet werden kann. Wenn alſo $T = t'$ und $V = u'$ geſezt wird, ſo iſt

$$t'' \pm u''\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2$$

Nun ſetze man zweitens dieſe Werthe von t'' und u'' ſtatt jener von t' und u', ſo wird

$$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2\ (T \pm V\sqrt{A})$$

iſt nun hier wiederum $T = t'$ und $V = u'$, und heiſſen die hieraus entſtehenden Werthe von t und u, nun t''' und u''', ſo ergibt ſich

$$t''' \pm u'''\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^3$$

Auf eine ähnliche Art findet ſich

$$t^{IV} \pm u^{IV}\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^4$$

und ſo weiter.

Wenn nun, der Einfachheit wegen, T und V die erſten und kleinſten Werthe von t und u ſind, die wir oben t', u' genannt haben, ſo iſt allgemein

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m$$

wo m jede ganze bejahte Zal ſeyn kann, und wegen dem doppelten Zeichen findet ſich

$$t = \frac{(T + V\sqrt{A})^m + (T - V\sqrt{A})^m}{2}$$

und

$$u = \frac{(T + V\sqrt{A})^m - (T - V\sqrt{A})^m}{2V\sqrt{A}}$$

Obſchon

Obſchon aber dieſe Ausdrücke irrational ſcheinen, ſo iſt deſſenungeachtet leicht zu ſehen, daß ſie rational werden, wenn man die Potenzen von $T \pm V\sqrt{A}$ wirklich entwickelt, weil, wie bekannt,

$$(T \pm V\sqrt{A})^m = T^m \pm m\,T^{m-1}V\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}T^{m-2}V^2A \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}T^{m-3}V^3 A\sqrt{A} + \text{ꝛc.}$$

iſt; folglich wird

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}AT^{m-2}V^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A^2T^{m-4}V^4 + \text{ꝛc.}$$

und $u = m\,T^{m-1}V + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}AT^{m-3}V^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^2T^{m-5}V^5 + \text{ꝛc.}$

wo für m jede ganze bejahte Zal genommen werden darf.

Wenn man nun nach und nach $m = 1, 2, 3, 4$ ꝛc. ſezt, ſo erhält man jedesmal neue Werthe für t und u, welche immer gröſſer und gröſſer werden.

Nun iſt noch übrig zu beweiſen, daß man auf dieſe Art alle mögliche Werthe von t und u erhalte, wenn anders T und V die kleinſten ſind. Deshalb muß gezeigt werden, daß zwiſchen den Werthen t und u, die einer beliebigen Zal m correſpondiren, und denjenigen, die der folgenden Zal $m + 1$ correſpondirten, unmöglich noch andre Werthe gefunden werden können,

können, die der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leiſten.

Wir wollen, z. B. die Werthe t''' und u''', die aus $m = 3$ entſpringen, und ſodann die Werthe t^{IV} und u^{IV}, bei welchen $m = 4$ iſt, nehmen, und ſetzen, es ſey möglich, daß zwiſchen dieſe noch andere Werthe d und v fallen, welche ebenfalls der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leiſten.

Weil $(t^{III})^2 - A(u^{III})^3 = 1$, $(t^{IV})^2 - A(u^{IV})^2 = 1$, und $d^2 - Av^2 = 1$, ſo wird auch $d^2 - (t^{III})^2 = A\left(v^2 - (u^{III})^2\right)$, und $(t^{IV})^2 - d^2 = A\left((u^{IV})^2 - v^2\right)$,

woraus erhellet, daß, wenn $d > t^{III}$, und $< t^{IV}$, auch $v > u^{III}$ und $< u^{IV}$ ſeye. Ueberdiß hat man auch noch folgende Werthe von t und u; nemlich

$$t = dt^{IV} - Avu^{IV}$$

und $u = du^{IV} - vt^{IV}$, welche eben der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leiſten; denn, wenn man ſie in dieſelbe ſezt, ſo erhält man

$$(dt^{IV} - Avu^{IV})^2 - A(vt^{IV} - du^{IV})^2 = (d^2 - Av^2)\left((t^{IV})^2 - A(u^{IV})^2\right) = 1,$$

und mithin eine identiſche Gleichung, weil $d^2 - Av^2 = 1$, und $(t^{IV})^2 - A(u^{IV})^2 = 1$. Aber aus den beiden lezteren Gleichungen folgt

$$d - v\sqrt{A} = \frac{1}{d + v\sqrt{A}}$$

und $t^{IV} - u^{IV}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$; Sezt man

nun

nun in $u = d\,u^{IV} - v\,t^{IV}$ ſtatt d den Werth

$$v\sqrt{A} + \frac{1}{d - v\sqrt{A}},$$

und ſtatt t^{IV}, $u^{IV}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$,

ſo findet ſich $u = \frac{u^{IV}}{d + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$.

Eben ſo kann auch die Gröſſe $t^{III}\,u^{IV} - u^{III}\,t^{IV}$ wegen $(t^{III})^2 - A\,(u^{III})^2 = 1$ alſo vorgeſtellt werden:

$$\frac{u^{IV}}{t^{III} + u^{III}\sqrt{A}} - \frac{u^{III}}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$$

Aber es iſt leicht zu ſehen, daß der vorhergehende Ausdruk für u kleiner iſt, als dieſer leztere, weil $d > t^{III}$, und $v > u^{III}$: folglich iſt der Werth von u kleiner, als die Gröſſe $t^{III}\,u^{IV} - u^{III}\,t^{IV}$. Nun aber iſt die leztere V gleich, denn

$$t^{III} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 + (T - V\sqrt{A})^3}{2}$$

$$t^{IV} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 + (T - V\sqrt{A})^4}{2}$$

$$u^{III} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 - (T - V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}}$$

$$u^{IV} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}}$$

mithin $t^{III}\,u^{IV} - t^{IV}\,u^{III} =$

$$\frac{(T - V\sqrt{A})^3\,(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4\,(T + V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}}.$$

Aber

Aber
$(T - V\gamma A)^3 (T + V\gamma A)^3 = (T^2 - AV^2)^3 = 1$,
weil $T^2 - AV^2 = 1$ ist, (ex hypoth.) folglich ist
$(T - V\gamma A)^3 (T + V\gamma A)^4 = T + V\gamma A$, und
$(T - V\gamma A)^4 \quad (T + V\gamma A)^3 = T - V\gamma A$,
folglich $t^{III} u^{IV} - t^{IV} u^{III} = \frac{2V\gamma A}{2V\gamma A} = V$.

Es muß also u kleiner als V seyn, welches gegen die Voraussetzung ist, weil angenommen worden, daß V der kleinste Werth von u sey. Folglich fallen zwischen t^{III}, t^{IV} und u^{III}, u^{IV} keine andre Werthe von t und u. Da aber eben diese Art zu schliessen auf alle Werthe von t und u, die aus obigen Formeln hergeleitet werden, angewandt werden kann, wenn man m irgend einer ganzen Zal gleich sezt, so folgt also hieraus, daß jene Formeln alle mögliche Werthe von t und u in sich begreifen.

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Werthe von t und u sowol bejaht als verneint angenommen werden können, welches aus eben der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ erhellet.

Methode, alle mögliche Auflösungen der unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei unbekannten Grössen, in ganzen Zalen zu finden.

§. 76.

Die Methoden, welche wir vorgetragen haben, sind zwar zur vollständigen Auflösung aller Gleichungen von der Form $Ay^2 + B = x^2$ hinlänglich: Aber es kann geschehen, daß Gleichungen des zweiten Grads

von

von einer zuſammengeſezteren Form gegeben ſind. Wir wollen demnach hier zeigen, wie auch dieſe aufgelößt werden können.

Es ſey die Gleichung gegeben,

$$ar^2+brs+cs^2+dr+es+f=o$$

wo a, b, c, d, e, f gegebene ganze Zalen, und r und s zwei unbekannte Gröſſen ſind, welche ebenfalls ganze Zalen ſeyn ſollen.

Vorderſamſt erhält man vermittelſt der gewöhnlichen Auflöſung

$$2ar+bs+d=v\left((bs+d)^2-4a(cs^2+es+d)\right)$$

wo, wie man ſiehet, die Schwierigkeit darinn beſtehet, daß

$$(bs+d)^2-4a(cs^2+es+d)$$

ein Quadrat werde.

Es ſey alſo, der Kürze wegen,

$$b^2-4ac=A,$$
$$bd-2ec=g,$$
$$d^2-4af=h,$$

ſo muß $As^2+2gs+h$ ein Quadrat ſeyn. Geſezt daſſelbe ſey $=y^2$, ſo iſt demnach

$$As^2+2gs+h=y^2$$

und $$As+g=v(Ay^2+g^2-Ah)$$

Es iſt alſo nur der Ausdruk Ay^2+g^2-Ah, oder wenn $g^2-Ah=B$ geſezt wird,

$$Ay^2+B$$

in ein Quadrat zu verwandeln, welches vermittelſt der oben abgehandelten Methoden geſchehen kann.

Wenn

Wenn daher $Ay^2 + B = x^2$ geſezt wird, ſo iſt $As + g = \pm x$, ferner iſt $2ar + bs + d = \pm y$; Nachdem alſo die Werthe von x und y gefunden worden, ſo erhält man r und s aus folgenden zwei Gleichungen

$$s = \frac{\pm x - g}{A},$$

$$r = \frac{\pm y - d - bs}{2a}.$$

Da aber r und s ganze Zalen ſeyn ſollen, ſo iſt klar:

1) daß x und y ebenfalls ganze Zalen ſeyn müſſen,

2) daß $\pm x - g$ durch A und $\pm y - d - bs$ durch $2a$ theilbar ſeyn muß.

Nachdem alſo alle mögliche Werthe von x und y in ganzen Zalen gefunden worden, müſſen unter denſelben diejenigen ausgeleſen werden, welche r und s zu ganzen Zalen machen können.

Iſt A verneint, oder eine bejahte Quadratzal, ſo haben wir gezeigt, daß die Anzal der Auflöſungen in ganzen Zalen immer beſtimmt ſey: ſo daß man alſo in dieſen beiden Fällen nach und nach alle gefundene Werthe für x und y zu probiren hat, und wenn keiner unter denſelben gefunden wird, der für r und s ganze Zalen gibt, ſo kann ſicher hieraus geſchloſſen werden, daß die vorgegebene Gleichung nicht in ganzen Zalen aufgelöſt werden könne.

Es entſteht alſo nur dann eine Schwierigkeit, wenn A eine bejahte Zal vorſtellt, die kein Quadrat iſt,

iſt, in welchem Falle wir gezeigt haben, daß die Anzal der möglichen Auflöſungen unendlich ſeyn könne: und da man alſo eine unendliche Menge von Werthen zu probiren hätte, ſo läßt ſich auf dieſem Weg niemals richtig beſtimmen, ob die vorgegebene Gleichung aufgelößt werden könne, oder nicht; ausgenommen wenn man eine ſichere Regel hätte, welche dieſes Probiren zwiſchen gewiſſe Gränzen einſchränkte, wovon wir jezt handeln werden.

§. 77.

Weil (nach §. 65.), $x = ny - Bz$, und (§. 72.) $y = pt - (Bq - np)u$, und $z = qt + (Cp - nq)u$, ſo iſt klar, daß die allgemeinen Ausdrücke von r und s dieſe Form haben:

$$r = \frac{\alpha t + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad s = \frac{\alpha' t + \beta' u + \gamma'}{\delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ bekannte ganze Zalen, und t und u durch die Formeln §. 75, in welchen der Exponent m jede bejahte ganze Zal vorſtellt, ebenfalls gegeben ſind. Die Frage läuft alſo dahinaus, für m denjenigen Werth zu finden, bei welchem r und s ganze Zalen werden.

§. 78.

Vorderſamſt bemerke ich, daß es immer möglich ſey, einen Werth u zu finden, der durch irgend eine gegebene Zal Δ theilbar ſey; denn, wenn man $u = \Delta\omega$ ſezt, ſo verwandelt ſich die Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ in $t^2 - A\Delta^2\omega^2 = 1$, welche immer in ganzen Zalen auflösbar iſt. Nimmt man nun $A\Delta^2$ ſtatt A, und ſtellt übrigens die obige Rechnung an, ſo finden ſich

die kleinsten Werthe t und ω: Da aber diese Werthe auch der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ Genüge leisten, so sind sie nothwendig in den Formeln §. 75. enthalten. Folglich muß es einen Werth von m geben, der den Ausdruk u durch Δ theilbar mache.

Dieser Werth von m heisse μ; und nun behaupte ich, daß, wenn in den allgemeinen Ausdrücken für t und u in angeführtem Orte $m = 2\mu$ gesezt wird, der Werth u durch Δ theilbar sey, und daß ferner t durch ebendiß Δ getheilt, 1 zum Ueberrest geben werde.

Denn wenn T' und V' diejenigen Werthe von t und u bedeuten, wo $m = \mu$, und T'' und V'' diejenigen, wo $m = 2\mu$; so ist (§. 75.)

$T' \pm V' \nu A = (T \pm V \nu A)^{\mu}$ und

$T'' \pm V'' \nu A = (T \pm V \nu A)^{2\mu}$, folglich

$(T' \pm V' \nu A)^2 = T'' \pm V'' \nu A$;

d. i. wenn man beiderseits die rationale Theile mit den rationalen, und die irrationale mit den irrationalen vergleicht

$T'' = (T')^2 + A(V')^2$, und $V'' = 2T'V'$,

folglich weil V' durch Δ theilbar ist, muß auch V'' durch eben diese Grösse theilbar seyn, und T'' wird ebendenselben Ueberrest geben, wie $(T')^2$. Nun ist

$$(T')^2 - A(V')^2 = 1,$$

(nach der Voraussetzung); folglich muß $(T')^2 - 1$ durch Δ theilbar seyn, und auch durch Δ^2, weil $(V')^2$ durch diese Grösse theilbar ist, folglich wird $(T')^2$, und mithin auch T'' durch Δ getheilt, 1 übrig lassen.

Ferner

Ferner ſage ich, daß, wenn die Werthe von t und u, welche irgend einem Exponenten m correſpondiren, durch Δ getheilt werden, ebendieſelbe Ueberreſte herauskommen, als bei denen Werthen von t und u, welche dem Exponenten $m+2\mu$ correſpondiren. Denn, wenn dieſe leztern d und υ heiſſen, ſo iſt

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m, \text{ und}$$

$$d \pm \upsilon\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu} \text{ folglich}$$

$$(d \pm \upsilon\sqrt{A}) = (t \pm u\sqrt{A})\,(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu}$$

Aber oben war

$$T'' \pm V''\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu}$$

Folglich iſt

$$d \pm \upsilon\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})\,(T'' \pm V''\sqrt{A})$$

woraus endlich, wenn die rationalen Theile mit den rationalen, und die irrationale mit mit den irrationalen verglichen werden, folgt:

$$d = tT'' + AuV'' \text{ und } \upsilon = tV'' + uT''.$$

Aber V'' iſt durch Δ theilbar, und T'' gibt zum Ueberreſt 1; alſo wird d zum Ueberreſt t, und υ zum Ueberreſt u haben.

Folglich werden überhaupt die Ueberreſte der der Werthe von t und u, welche den Exponenten $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$ ꝛc. correſpondiren, ebendieſelben ſeyn, als diejenige von den Werthen, welche dem Exponenten m correſpondiren, wo m jede ganze Zal ſeyn kann.

Hieraus folgt alſo, daß um die Ueberreſte zu bekommen, die aus der Diviſion der Glieder t', t'', t'''

t''' ꝛc. und u', u'', u''' ꝛc. (welche aus $m = 1, 2, 3$ ꝛc. entſpringen) durch die Zal Δ, entſtehen, man dieſe Ueberreſte nur bis auf die Glieder $t^{2\mu}$ und $u^{2\mu}$ incluſive berechnen dörfe; weil nach dieſen Gliedern ebendieſelben Ueberreſte in ebenderſelben Ordnung ins Unendliche wiederkehren.

Was aber die Glieder $t^{2\mu}$ und $u^{2\mu}$ anbetrift, ſo werden diß ebendiejenigen ſeyn, von denen das eine $u^{2\mu}$ vollkommen durch Δ theilbar iſt, und das andre $t^{2\mu}$ die Einheit zum Ueberreſt haben wird. Alſo müſſen die Diviſionen ſo weit fortgeſezt werden, bis man auf die Ueberreſte 1 und 0 kommt, und dann kann man verſichert ſeyn, daß die folgenden Glieder immer ebendieſelbe Ueberreſte, als die bereits gefundenen geben werden.

Der Exponent 2μ kann auch à priori gefunden werden. Man mache nämlich die §. 71. N° 2 angezeigte Rechnung, erſtlich für die Zal A, und dann für die Zal $A\Delta^2$, und wenn π die Zal desjenigen Glieds der Reihe p', p'', p''' ꝛc. iſt, welches im erſten Falle $= 1$ iſt, und ϱ die Zal desjenigen Glieds ebenderſelben Reihe, welches im zweiten Fall ebenfalls $= 1$ iſt, ſo ſuche man hierauf die kleinſte, ſowol durch π als ϱ theilbare Zal, welche durch π dividirt, den geſuchten Werth μ geben wird.

Wenn alſo z. B. $A = 6$, und $\Delta = 3$ iſt, ſo findet ſich in der Tabelle §. 41. für $\surd 6$, $p^{\circ} = 1$, $p^{I} = -2$, $p^{II} = 1$, alſo $\pi = 2$. Hernach iſt in ebenderſelben Tabelle für $\surd 6.9 = \surd 54$, $p^{\circ} = 1$, $p^{I} =$

$p^I = -5$, $p^{II} = 9$, $p^{III} = -2$, $p^{IV} = 9$, $p^V = -5$, $p^{VI} = 1$, alſo $\varrho = 6$. Aber die kleinſte, ſowol durch 2, als durch 6 theilbare Zal iſt 6, welche durch 2 dividirt, 3 zum Quotienten gibt, ſo daß hier $\mu = 3$, $2\mu = 6$ iſt.

Um alſo in dieſem Fall alle Ueberreſte der Diviſion der Glieder t', t'', t''' ꝛc. und u', u'', u''' ꝛc. durch die Zal 3 zu bekommen, ſuche man nur die Ueberreſte der 6 erſten Glieder einer einzigen Reihe, weil die folgenden Glieder immer ebendieſelbe Ueberreſte geben werden: nemlich die ſiebenden Glieder werden ebendieſelbe Ueberreſte geben, wie die erſten, die achten, wie die zweiten, und ſo weiter ins Unendliche.

Es kann zuweilen geſchehen, daß die Glieder t^μ und u^μ ebendieſelben Eigenſchaften haben, wie die Glieder $t^{2\mu}$ und $u^{2\mu}$; daß nemlich u^μ durch Δ theilbar iſt, und t^μ zum Ueberreſt 1 haben wird. In dieſen Fällen läßt ſich nicht bis auf jene Glieder fortgehen, weil die Ueberreſte der folgenden Glieder $t^{1+\mu}$ $t^{\mu+2}$ ꝛc. und $u^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$ u. ſ. w. ebendieſelben ſeyn werden, als die Ueberreſte der Glieder t', t'', t''' ꝛc. und u', u'', u''' ꝛc.

Ueberhaupt bezeichne M den kleinſten Werth des Exponenten m, welcher $t - 1$, und u durch Δ theilbar mache.

§. 79.

Gesezt nun, man habe irgend einen Ausdruk, der aus t, u und gegebenen ganzen Zalen besteht, so, daß derselbe immer ganze Zalen vorstelle, und man suche diejenigen Werthe, welche man dem Exponenten m geben muß, damit dieser Ausdruk durch irgend eine gegebene Zal Δ ohne Rest getheilt werden könne, so muß man nach und nach $m = 1, 2, 3$ ꝛc. bis M machen; und wenn keine dieser Voraussezungen den gegebenen Ausdruk durch Δ theilbar macht, so läßt sich sicher schliessen, daß derselbe niemals durch diese Grösse getheilt werden könne, was für Werthe man auch m beilegt.

Findet sich aber auf diese Art einer oder mehrere Werthe für m, welche die gegebene Formel durch Δ theilbar machen, so werden, wenn N einer dieser Werthe ist, alle andre, die eben dieses bewirken, folgende seyn: $N, N + M, N + 2M, N + 3M$ ꝛc. und überhaupt $N + \lambda M$, wo λ jede ganze Zal vorstellt.

Ingleichem, wenn ein andrer aus t, u und bekannten Zalen bestehender Ausdruk gegeben wäre, welcher zugleich durch irgend eine andre Zal Δ' theilbar seyn sollte: so müßte man auf ebendieselbe Art die hieher gehörigen Werthe M und N suchen, die wir hier mit M′ und N′ bezeichnen wollen, und dann werden alle Werthe des Exponenten m, die der Bedingung Genüge leisten, in der Formel $N' + \lambda' M'$ enthalten seyn, wo λ' irgend eine ganze Zal vorstellt. Mithin müssen diejenigen Werthe gesucht werden, die den ganzen Zalen λ und λ' beigelegt werden müssen, damit $N + \lambda M = N' + \lambda' M'$ werde, wo also $N' - N = \lambda M - \lambda' M'$ seyn muß, welche Gleichung

chung nach der Methode des §. 42. aufgelößt werden kann.

Was wir hier geſagt haben, kann nun jezt ſehr leicht auf den Fall des §. 77. angewandt werden, wo die vorgegebenen Ausdrücke die Geſtalt

$$\alpha t + \beta u + \gamma, \quad \alpha' t + \beta' u + \gamma'$$

haben, und die Diviſores δ und δ' ſind.

Nur muß man ſich erinnern, daß man, um alle mögliche Fälle zu bekommen, die Zaleu t und u ſowol bejaht als verneint nehmen müſſe.

Anmerkung.

§. 80.

Wenn die in ganzen Zalen aufzulöſende Formel dieſe wäre:

$$ar^2 + 2brs + cs^2 = f,$$

ſo kann die Methode des §. 65. unmittelbar hierauf angewandt werden; denn

1) iſt klar, daß r und s keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben können, wenn nicht f ebenfalls durch das Quadrat dieſes Theilers theilbar iſt, ſo daß ſich alſo die Formel immer auf den Fall zurükführen läßt, da r und s keinen gemeinſchaftlichen Theiler mehr haben.

2) Siehet man auch, daß s und f keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben können, wenn nicht derſelbe zugleich auch es von a iſt, (wo r und s nach N° 1 keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben). So läßt ſich alſo die Frage auch auf den

Fall zurük führen, daß s und f unter sich Primzalen seyn müssen. (S. §. 64.)

Da nun also s, f und r keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann $r = ns - fz$ gesezt werden, und damit die Gleichung in ganzen Zalen aufgelößt werden könne, muß für n ein bejahter oder verneinter Werth gesezt werden, der nicht $> \frac{f}{2}$, und so ist, daß $an^2 + 2bn + c$ durch f theilbar werde Wenn dieser Werth statt n gesezt wird, so wird die ganze Gleichung durch f theilbar, und demnach auf den Fall des §. 66. ꝛc. zurükgeführt.

Eben diese Methode läßt sich auch anwenden, um die Gleichung

$$ar^m + br^m s + cr^{m-1} s^2 \text{ ꝛc. } + Ks^m = b,$$

wo a, b, c ꝛc. gegebene ganze Zalen, und r und s zwei unbestimte Grössen sind, welche ebenfalls ganze Zalen vorstellen, in eine andre ähnliche Gleichung zu verwandeln, in welcher aber das bekannte Glied die Einheit ist; und dann läßt sich die allgemeine Methode K. 2. anwenden. Man sehe die Anmerkung §. 30.

1. Beispiel.

§. 81.

Man soll diese Grösse

$$\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)}$$

rational machen, indem für s nur ganze Zalen genommen werden.

Es ist also diese Gleichung

$$30 + 62s - 7s^2 = y^2$$

auf-

aufzulöſen, welche, wenn man ſie mit 7 multiplicirt, auch alſo vorgeſtellt werden kann

$$7 \cdot 30 + (31)^2 - (7s - 31)^2 = 7y^2,$$

oder wenn $7s - 31 = x$ geſezt wird, $x^2 = 1171 - 7y^2$, oder $x^2 + 7y^2 = 1171$.

Dieſe Gleichung iſt in dem Fall des §. 64., ſo, daß $A = -7$, und $B = 1171$, woraus erhellet, daß y und B unter ſich Primzalen ſeyn müſſen, weil dieſe leztere Zal keinen quadratiſchen Faktor enthält.

Man mache alſo, nach der Methode §. 65., $x = ny - 1171z$; damit nun dieſe Gleichung aufgelößt werden kann, muß für n eine ſolche ganze bejahte oder verneinte Zal geſucht werden, die nicht $> \frac{B}{2}$ d. i. nicht > 580, und zugleich ſo iſt, daß $n^2 - A$, oder $n^2 + 7$ durch B, oder 1171 getheilt werden kann.

Dieſe Zal iſt nun $n = \pm 321$, diß gibt

$$n^2 + 7 = 1171 \cdot 88.$$

Sezt man nun den Werth von $x = \pm 321y - 1171z$ in die obige Gleichung, ſo wird ſie durch 1171 theilbar, und verwandelt ſich in

$$88y^2 \pm 642yz + 1171z^2 = 1.$$

Um nun dieſe Gleichung aufzulöſen, kann man die §. 70. vorgetragene zweite Methode gebrauchen, welche in der That einfacher und bequemer, als die erſte iſt. Da aber der Coefficient von y^2 kleiner iſt, als der von z^2, ſo iſt hier $D = 1171$, $D' = 88$ und $n = \pm 321$.

Wenn man nun, der Kürze wegen, den Buchſtaben y ſtatt d, und y' ſtatt z ſezt, ſo läßt ſich,

nach obigem, folgende Rechnung machen, wobei erstlich $n = +321$ angenommen wird.

$$m = \frac{321}{88} = 4, \quad n^{I} = 321 - 4 \cdot 88 = -31$$

$$m^{I} = \frac{-31}{11} = -3, \quad n^{II} = -31 + 3 \cdot 11 = 2$$

$$m^{II} = \frac{2}{1} = 2, \quad n^{III} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$D^{II} = \frac{31^2+7}{88} = 11, \quad y = 4y^{I} + y^{II}$$

$$D^{III} = \frac{4+7}{11} = 1, \quad y^{I} = -3y^{II} + y^{III}$$

$$D^{IV} = \frac{7}{1} = 7, \quad y^{II} = 2y^{III} + y^{IV}$$

Da $n^{III} = 0$, und mithin $< \frac{D^{III}}{2}$ und $\frac{D^{IV}}{2}$, so bricht man hier ab, und macht

$D^{III} = M = 1$; $D^{IV} = L = 7$, $n^{III} = 0 = N$,

und $y^{III} = \xi$, $y^{IV} = \Psi$, weil $D^{III} < D^{IV}$.

Indessen bemerke ich, daß, da $A = -7$, und folglich verneint ist, $M = 1$ seyn müsse, wenn die Gleichung soll aufgelößt werden können. Diß ist auch wirklich gefunden worden; man kann also hieraus schliessen, daß die Auflösung derselben möglich sey. Es sey daher $\xi = y^{III} = 0$, $\Psi = y^{IV} = \pm 1$, so folgt aus den obigen Formeln $y^{II} = \pm 1$, $y^{I} = \pm 3 = z$, $y = \mp 12 \pm 1 = \mp 11$, wo die Zeichen + und —

nach

nach Belieben genommen werden können. Also ist

$$x = 321\,y - 11712 = \mp 18,$$

und folglich $s = \frac{x + 31}{7} = \frac{31 \mp 18}{7} = \frac{13}{7}$

oder $= \frac{49}{7} = 7$. Da aber s eine ganze Zal seyn soll, so kann nur dieser leztere Werth $s = 7$ genommen werden.

Es ist zu bemerken, daß der andere Werth s, nemlich $\frac{13}{7}$, obgleich derselbe ein Bruch ist, dennoch $\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)}$ zu einer ganzen Zal mache, und zwar ist dieselbe ebenfalls $= 11$, wie diejenige, die aus $s = 7$ entsteht, so daß also diese beiden Werthe von s die Wurzeln der Gleichung $30 + 62s - 7s^2 = 121$ sind.

Oben haben wir $n = 321$ angenommen, man könnte aber auch $n = -321$ setzen: indessen ist leicht zu sehen, daß die einzige Veränderung, die deshalb in den vorhergehenden Formeln vorgienge, diese wäre daß die Werthe m, m′, m″ ꝛc. n′, n″, n‴ ꝛc. ihre Zeichen ändern würden, wodurch auch sowol y′ als y verschiedene Zeichen bekämen, welches aber keine neue Werthe geben kann, weil diese Werthe bereits das doppelte Zeichen $\pm$ haben.

Eben diß gilt auch von andern Fällen, so daß es also unnöthig ist, den Werth n sowol bejaht als auch verneint zu nehmen.

Der Werth $s = 7$ wird aus $n = \pm 321$ hergeleitet. Es liessen sich noch andre Werthe von s finden, wenn mehrere von n gefunden werden könnten, die

die die erforderlichen Eigenschaften haben. Da aber B = 1171 eine Primzal ist, so gibt es keine andre Werthe für n, wie wir anderswo gezeigt haben (Denkwürdigk. der Berl. Akad. vom J. 1767. S. 164), woraus sich also schliessen läßt, daß die Zal 7 die einzige ist, die die Bedingung erfüllt.

Indessen gestehe ich, daß das vorhergehende Problem viel leichter durch bloses Probiren aufgelößt werden könne. Denn, nachdem man auf $x^2 = 1171 - 7y^2$ gekommen, darf man nur statt y alle ganze Zalen setzen, deren Quadrate durch 7 multiplicirt nicht > 1171, das heißt, alle Zalen die $< \sqrt{\frac{1171}{7}}$ oder < 13 sind.

Eben dieses gilt auch von allen andern Gleichungen, in denen A verneint ist. Denn, nachdem man auf die Gleichung $x^2 = B + Ay^2$ gekommen, oder (wegen $A = -a$) auf $x^2 = B - ay^2$, so erhellet, daß wenn es für y einige Werthe gibt, die dieser Bedingung Genüge leisten, dieselbe nur unter denen Zalen seyn können, die $< \sqrt{\frac{B}{a}}$ sind. Aus dieser Ursache habe ich nur deswegen besondere Methoden für den Fall, da A verneint ist, gegeben, weil diese Methoden den genauesten Zusammenhang mit denjenigen haben, die das bejahte A betreffen, und weil dieselben mit den andern so nahe verwandt sind, daß sie ihnen einen grössern Grad von Evidenz geben, und auch von jenen bekommen.

2. Beispiel.

2. Beispiel.

§. 85.

Wir wollen nun noch einige Beispiele für den Fall geben, da A bejaht ist, und daher annehmen, man soll alle ganzen Zalen finden, die so sind, daß

$$\sqrt{(13y^2 + 101)}$$

rational werde.

Hier ist also (§. 64.) $A = 13$, $B = 101$, und daher die in ganzen Zalen aufzulösende Gleichung

$$x^2 - 13y^2 = 101,$$

in welcher, weil 101 durch keine Quadratzal theilbar ist, y und 101 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können.

Man mache also (§. 65.) $x = ny - 101z$, so muß $n^2 - 13$ durch 101 theilbar seyn, wo n eine Zal bedeutet, die nicht $> \frac{101}{2}$ oder als 51 ist. Diese Zal ist nun $n = 35$, mithin $n^2 = 1225$, und $n^2 - 13 = 1212 = 101 \cdot 12$. Sezt man nun den Werth von x, nemlich $\pm 35y - 101z$ in obige Gleichung, so läßt sie sich durch 101 theilen, und verwandelt sich in

$$12y^2 \mp 20yz + 101z^2 = 1.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, bedienen wir uns auch dißmal der Methode §. 70, und seßen

$$D' = 12,\ D = 101,\ n = \pm 35,$$

statt des Buchstaben d aber wollen wir hier y beibehalten, und nur z in y' verwandeln, wie im vorhergehenden Beispiel. Es sey 1) $n = +35$, so läßt sich folgende Berechnung anstellen:

m =

$$m = \frac{35}{12} = 3; \quad n' = 35 - 3 \cdot 12 = -1; \quad D'' = \frac{1 - 13}{12} = -1, \quad y = 3y' + y'',$$

$$m' = \frac{-1}{-1} = 1; \quad n'' = -1 + 1 = 0; \qquad D''' = \frac{-13}{-1} = 13, \quad y' = y'' + y''',$$

Da $n'' = 0$, und folglich $< \frac{D''}{2}$, und auch $< \frac{D'''}{2}$, so brechen wir hier ab, und erhalten folgende Verwandlung:

$$D'''(y'')^2 - 2n''y''y''' + D''(y''')^2 = 1,$$

oder

$$13(y'')^2 - (y''')^2 = 1,$$

welche auf die Form

$$(y''')^2 - 13(y'')^2 = -1$$

gebracht, so ist, daß die Methode des §. 71. N° 2. darauf angewandt werden kann, und da $A = 13$, und mithin < 100, so kann hier die Tabelle des §. 41. gebraucht werden.

Man muß also sehen, ob in der oberen Reihe der der Wurzel von 13 correspondirenden Zalen, die Einheit in einer geraden Stelle gefunden werde; denn obige Gleichung ist nur dann auflösbar, wenn in der Reihe P^0, P', P'' ꝛc. ein Glied $= -1$ vorkommt. Aber $P^0 = 1, -P' = 4, P'' = 3$ ꝛc. folglich ꝛc. Nun wird in der Reihe 1, 4, 3, 3, 4, 1, die Zal 1 in der sechsten Stelle gefunden, so daß $P^V = -1$; folglich läßt sich die vorgegebene Gleichung auflösen, wenn man $y''' = p^V$, und $y'' = q$ sezt, wo die Zalen p^V und q^V nach den Formeln des §. 25. berechnet werden, indem man statt μ, μ', μ'' ꝛc. die Werthe 3, 1, 1, 1, 1, 6 ꝛc. sezt, welche die untere Reihe der, der $\sqrt{13}$ correspondirenden Zalen ausmachen.

Es ist also

$p^{\circ} = 1.$	$q^{\circ} = 0.$
$p^{I} = 3.$	$q^{I} = 1.$
$p^{II} = p^{I} + p^{\circ} = 4.$	$q^{II} = 1.$
$p^{III} = p^{II} + p^{I} = 7.$	$q^{III} = q^{II} + q^{I} = 2.$
$p^{IV} = p^{III} + p^{II} = 11.$	$q^{IV} = q^{III} + q^{II} = 3.$
$p^{V} = p^{IV} + p^{III} = 18.$	$q^{V} = q^{IV} + q^{III} = 5.$

Also $y^{III} = 18$, und $y^{II} = 5$; mithin $y^{I} = y^{II} + y^{III} = 23$, und $y = 3y^{I} + y^{II} = 74$.

Wir haben oben $12 = +35$ angenommen. Man hätte aber auch $n = -34$ setzen können.

Es ſey alſo 2) $n = -35$, mithin

$$m = \frac{-35}{12} = -3;\ n' = -35 + 3 \cdot 12 = 1;\ D'' = \frac{1-13}{12} = -1;\ y = -3y' + y''.$$

$$m' = \frac{1}{-1} = -1;\ n'' = 1 - 1 = 0;\ D''' = \frac{-13}{-1} = 13;\ y' = -y'' + y'''.$$

Man erhält demnach eben die Werthe D″, D‴ und n″, wie vorher, so daß die in y″ und y‴ ausgedrükte Gleichung ebenfalls ebendieſelbe ſeyn wird.

Es iſt alſo auch $y''' = 18$ und $y'' = 5$, folglich $y' = -y'' + y''' = 13$, und $y = -3y' + y'' = -34$.

Wir haben demnach zwei Werthe von y, nebſt den correſpondirenden Werthen von y′ oder z gefunden, und dieſe ſind aus der Vorausſetzung $n = \pm 35$ hergeleitet. Da aber kein andres n gefunden werden kann, das die erforderlichen Eigenſchaften hat; ſo folgt hieraus, daß die vorhergehenden Werthe die einzigen urſprünglichen ſind, die auf dieſe Art erhalten werden: Indeſſen laſſen ſich durch die Methode des §. 72 unzählig viele abgeleitete finden.

Man ſetze alſo y und z ſtatt p und q, ſo iſt allgemein (nach §. 72.)

$y = 74t - (101.23 - 35.74)u = 74t + 267u$

$z = 23t + (12.74 - 35.23)u = 23t + 83u$

oder

$y = -34t - (101.13 - 35.34)u = -34t - 123u$

$z = 13t + (-12.34 + 35.13)u = 13t + 47u$

und nun müſſen für t und u die Werthe aus der Gleichung $t^2 - 13u^2 = 1$ entwickelt werden: Aber dieſe Werthe finden ſich bereits in der dem 8. Kapitel des Euleriſchen Werks angehängten Tabelle berechnet, wo $t = 649$ und $u = 180$ iſt. Sezt man ſie ſtatt T und V in die Formeln des §. 75, ſo findet ſich allgemein

$$t = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m + (649 - 180\sqrt{13})^m}{2}$$

u=

$$u = \frac{(649+180\sqrt{13})^m - (649-180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

wo m jede ganze bejahte Zal ſeyn kann.

Da aber die Werthe von t und u ſowol bejaht als verneint genommen werden können, ſo werden die Werthe von y, welche der Frage Genüge leiſten, alle in folgenden Formeln enthalten ſeyn:

$$y = \pm 74\,t \pm 267\,u$$
$$y = \pm 34\,t \pm 123\,u.$$

wo nach Belieben + oder − genommen werden kann.

Wenn $m = 0$ iſt, ſo wird $t = 1$, und $u = 0$, folglich $y = \pm 74$, oder $= \pm 34$, und dieſer lezte Werth iſt der kleinſte, der die Aufgabe auflöſen kann.

Ich habe eben dieſes Problem bereits in den Denkwürdigkeiten der Berliner Akademie vom Jahr 1768 S. 243 aufgelößt. Da aber die daſelbſt gebrauchte, und auch hier §. 66 vorgetragene, Methode von derjenigen verſchieden iſt, deren ich mich ſo eben bediente, ſo habe ich daſſelbe noch einmal auflöſen wollen, damit der Leſer im Stande ſeyn möge, beide Methoden mit einander zu vergleichen.

3. Beiſpiel.

§. 83.

Man ſoll diejenigen ganzen Zalen für y ſuchen, welche

$$\sqrt{(79\,y^2 + 101)}$$

rational machen.

Es iſt alſo die Gleichung

$$x^2 - 79\,y^2 = 101$$

in ganzen Zalen aufzulöſen, wo y und 101 keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben dörfen, weil dieſe leztere Zal keinen quadratiſchen Faktor in ſich begreift.

Man ſeze alſo $x = ny - 101z$: ſo muß $n^2 - 79$ durch 101 theilbar, und $n < \frac{101}{2}$ oder 51 ſeyn. Nun findet ſich $n = 33$, diß gibt

$$n^2 - 13 = 1010 = 101 \cdot 10.$$

Man kann demnach $n = \pm 33$ nehmen, und dieſe Werthe ſind die einzigen, die die erforderliche Eigenſchaft haben.

Sezt man aber wirklich $\pm 33\,y - 101\,z$ ſtatt x in obige Gleichung, und dividirt dieſelbe durch 101, ſo verwandelt ſie ſich in

$$10\,y^2 \mp 66\,yz + 101\,z^2 = 1.$$

Nun ſey $D' = 10$, $D = 101$, $n = \pm 33$. Nimmt man alſo zuerſt n bejaht, und ſtellt eben dieſelbe Berechnung an, wie im vorhergehenden Beiſpiel, ſo ergibt ſich

$$m = \tfrac{33}{10} = 3;\quad n' = 33 - 3 \cdot 10 = 3,\quad D'' = \tfrac{9-79}{10} = -7,$$

$$y = 3\,y' + y''.$$

Da aber $n' = 3$ bereits $< \frac{D'}{2}$ und $< \frac{D''}{2}$ iſt, ſo iſt es nicht nöthig, weiter zu gehen, und man erhält daher die Gleichung:

$$-7\,(y')^2 - 6\,y'y'' + 10\,(y'')^2 = 1,$$

welche mit 7 multiplicirt, alſo vorgeſtellt werden kann:

$$(7\,y' + 3\,y'')^2 - 79\,(y'')^2 = -7.$$

Weil

Weil nun $7 < \sqrt{79}$, ſo muß, wenn die Gleichung auflösbar ſeyn ſolle, die Zal 7 unter den Gliedern der obern Reihe derjenigen Zalen vorkommen, die in der Tabelle des §. 41. der Quadratwurzel von 79 cor ſpondiren; überdiß muß dieſe Zal 7 eine gerade Stelle einnehmen, weil ſie das Zeichen — hat. Die ſo eben angeführte Reihe aber enthält nur die Zalen 1, 15, 2, die immer wiederholt werden; man kann alſo ohne weiters hieraus ſchlieſſen, daß, wenigſtens auf dieſem Weg, nemlich durch $n = 33$ dieſe leztere Gleichung nicht auflösbar ſey, und folglich auch die vorgegebene nicht.

Nun iſt noch zweitens übrig, den andern Werth $n = -33$ zu verſuchen: dieſer gibt

$$m = \frac{-33}{10} = -3;\ n' = -33 + 3 \cdot 10 = -3;\ D'' = \frac{9 - 79}{10} = -7$$

$$y = -3y' + y''.$$

woraus die Verwandlung entſteht

$$-7(y')^2 + 6y'y'' + 10(y'')^2 = 1,$$

oder

$$(7y' + 3y'')^2 - 79(y'')^2 = -7.$$

welche Gleichung der vorhergehenden iſt. Woraus alſo der Schluß gezogen werden kann, daß die vorgegebene Gleichung unmöglich in ganzen Zalen aufgelößt werden könne.

Anmerkung.

§. 84.

Euler findet findet in einer vortreflichen Abhandlung, die im 9. Bande der neuen Petersburger Commentare ſtehet, folgende Regel, die Auflösbarkeit der ganzen Gleichung von der Geſtalt

$$x^2 - Ay^2 = B$$

(wo B eine Primzal iſt), zu beurtheilen: Die Gleichung ſey nemlich möglich, ſo oft B in dem Ausdruk $4An + r^2$ oder $4An + r^2 - A$ enthalten iſt. Aber das vorhergehende Beiſpiel widerlegt dieſe Regel: denn 101 iſt eine Primzal von der Form

$$4An + r^2 - A, \text{ (wo } A = 79, n = -4,$$

und $r = 38$) und deſſen ungeachtet kann doch die Gleichung $x^2 - 79y^2 = 101$ nicht in ganzen Zalen aufgelößt werden.

Wäre die vorhergehende Regel wahr, ſo würde daraus folgen, daß wenn die Gleichung $x^2 - Ay = B$ möglich iſt, wenn B irgend einem Werth b hat, ſie auch noch möglich ſeyn müßte, wenn

$$B = 4An + b$$

genommen würde, wenn anders B eine Primzal wäre. Dieſe leztere Regel könnte noch in ſofern eingeſchränkt werden, daß man annähme, b ſey eine andre Primzal. Aber auch dieſe Einſchränkung wird durch das vorhergehende Beiſpiel wiederlegt; denn $101 = 4An + b$, wo $A = 79$, $n = -2$, und $b = 733$; aber 733 iſt eine Primzal von der Form $x^2 - 79y^2$, wenn $x = 38$, und $y = 3$ geſezt wird, und gleichwol iſt 101 nicht von eben dieſer Form $x^2 - 79y^2$.

Achtes Kapitel.

Bemerkungen über die Gleichungen von der Gestalt

$$p^2 = A q^2 + 1,$$

und über die gewöhnliche Art sie in ganzen Zalen aufzulösen.

§. 85.

Die Methode, die im 7. Kap. des Eulerischen Werks abgehandelt worden, um die Gleichungen von der Form $p^2 = Aq^2 + 1$ aufzulösen, ist eben diejenige, welche Wallis in seiner Algebra, (Kap. 98.) gegeben hat, und deren Erfindung er dem Lord Brounker zuschreibt. Ozanam, der sie in seiner Algebra ebenfalls vorträgt, nennt den Fermatius als ihren Erfinder. Dem sey aber, wie ihm wolle, so ist doch so viel gewiß, daß Fermatius der Urheber des obigen Problems ist. Er hat dasselbe allen englischen Geometern aufgegeben, wie aus dem Commercium Epistolicum des Wallis erhellet; und diß veranlaßte Brouner die bemeldete Methode zu erfinden. Es scheint aber, dieser Schriftsteller habe den ausgebreiteten Nutzen des von ihm aufgelößten Problems nicht eingesehen.

Man findet auch weder in den Werken des Fermatius, noch in irgend einem andern Werk des vorigen Jahrhunderts, das von der unbestimmten Analytik handelt, die geringste Spur davon. Es ist demnach wahrscheinlich, daß Fermatius, welcher die Theorie der unbestimmten Gröſſen vorzüglich abgehandelt, und uns sehr schöne Sätze von denselben hinterlassen hat, auf dieses Problem gekommen, als er über die Auflösung der Gleichungen $x^2 = Ay^2 + B$ nachdachte, auf welche leztere alle übrige vom zweiten Grade, mit zwei unbekannten Gröſſen, gebracht werden können. Uebrigens hat man dem Euler allein den Saz zu verdanken, daß dieses Probem nothwendig sey, um alle mögliche Auflösungen jener Gleichungen zu finden. (s. 6. Kap. des 6. Bandes der älteren Petersburger Abhandlungen, und den 9. Band der neueren.)

Die Methode, deren wir uns bedienten, um diesen Saz zu erweisen, ist etwas von der Eulerischen verschieden, aber sie ist auch, wenn ich nicht irre, directer und allgemeiner. Denn eines theils führt die Eulerische Methode auf Brüche, da man doch ganze Zalen sucht, und andern theils siehet man nicht deutlich ein, daß die Voraussetzungen, wodurch die Brüche hinweggeschaft werden, die einzigen sind, die statt finden können. In der That habe ich anderswo gezeigt, daß es nicht immer genug sey, eine einzige Gleichung von der Form $x^2 = Ay^2 + B$ zu finden, um durch Hülfe der Gleichung $p^2 = Aq^2 + 1$ alle andere daraus herzuleiten, und öfters, zum wenigsten wenn B keine Primzal ist, kann es Werthe von x und y geben, welche nicht in den allgemeinen Ausdrücken Eulers enthalten sind. (s. §. 45 meiner

ner Abhandlung über unbestimmte Probleme, in den Berliner Denkwürdigkeiten vom Jahr 1767.)

Was sofort die Methode anbetrift, $p^2 = A\,q^2 + 1$ aufzulösen, so scheint die im 7. K. des Eulerischen Werks vorgetragene sehr unvollkommen, so sinnreich sie auch immer seyn mag. Denn 1) sieht man aus derselben nicht deutlich ein, daß jede Gleichung dieser Art immer in ganzen Zalen aufgelößt werden könne, wenn a eine bejahte Zal bedeutet, die kein Quadrat ist. 2) Ist aus ihr nicht erwiesen, daß man immer die gesuchte Auflösung wirklich auch finde. Wallis hat zwar den ersten dieser beiden Sätze zu erweisen gesucht, aber sein Beweis ist nicht logikalisch richtig, indem er einen Zirkel im Schliessen begangen hat *). Ich schmeichle mir also der erste gewesen zu seyn, der diese Materie mit der gehörigen Schärfe abgehandelt und einen strengen Beweis gegeben hat, und zwar zuerst im 6. Bande der Turiner Miscellanien; aber die daselbst gegebene Methode ist sehr weitläufig und indirekt; da hingegen die Methode des 37. §. aus den ächten Grundsätzen und der eigentlichen Natur der Sache hergeleitet ist, und wie mir vorkommt, nichts zu wünschen übrig läßt. Dieser Methode können wir uns auch bedienen, um die Methode des 7. Kap. zu prüfen, und die Fehler kennen zu lernen, in welche man verfallen könnte, wenn man diese ohne die gehörige Vorsicht gebrauchen wollte. Diß soll nun noch kürzlich gezeigt werden.

*) Man sehe seine Algebra Kap. 99.

§. 86.

Aus dem, was im 2. Kapitel erwiesen worden, folgt, daß die Werthe p und q, welche der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$ Genüge leisten, keine andere seyn können, als die Glieder derjenigen Hauptbrüche, die aus dem fortlaufenden Bruch, der den Werth von $\sqrt{A}$ ausdrükt, hergeleitet werden; so daß wenn man annimmt, dieser Bruch sey,

$$\mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \text{&c.} + \cfrac{1}{\mu^{\varrho}}}},$$

so wird nothwendig

$$\frac{p}{q} = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \text{&c.} + \cfrac{1}{\mu^{\varrho}}}}$$

seyn, wo μ^{ϱ} irgend ein Glied der unendlichen Reihe μ', μ'', μ''' ist, dessen Stelle ϱ nur durch die wirkliche Ausrechnung bestimmt werden kann.

Es ist zu bemerken, daß in diesem fortlaufenden Bruche die Zalen μ, μ', μ'' &c. alle bejaht seyn müssen; obschon wir §. 3. gezeigt haben, daß überhaupt bei fortlaufenden Brüchen die Nenner bejaht oder verneint gemacht werden können, je nachdem man die nächsten Werthe kleiner oder gröſſer, als die wahren nimmt; Aber die Methode des ersten Problems

(§. 23. und folg.) erfordert nothwendig, daß die nächsten Werthe μ, μ', μ'' ꝛc. alle kleiner genommen werden.

§. 87.

Da der Bruch $\frac{p}{q}$ dem fortlaufenden Bruch, deſſen Glieder μ, μ', μ'' ꝛc. ſind, gleich iſt, ſo erhellet aus §. 4, daß μ der Quotient von p durch q dividirt iſt, ferner μ' derjenige von q dividirt durch den erſten Ueberreſt, μ'' derjenige des erſten Ueberreſts, dividirt durch den zweiten, u. ſ. w. Wenn daher dieſe Ueberreſte r, s, t ꝛc. heiſſen, ſo iſt aus der Natur der Diviſion

$$p = \mu q + r,\ q = \mu' r + s,\ r = \mu'' s + t \text{ ꝛc.}$$

wo der lezte Ueberreſt nothwendig $= 0$, und der vorlezte $= 1$ ſeyn wird, weil p und q keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben. Alſo iſt μ derjenige ganze Werth, der $\frac{p}{q}$ am nächſten kommt; μ' der von $\frac{q}{r}$, μ'' der von $\frac{r}{s}$ ꝛc. wo übrigens dieſe Werthe kleiner genommen werden, als die wahren, ausgenommen der lezte μ^ϱ, welcher dem gegebenen Bruch vollkommen gleich ſeyn wird, weil der folgende Ueberreſt $= 0$ angenommen iſt.

Da aber die Zalen μ, μ', μ'' ꝛc. für den Bruch $\frac{p}{q}$ und für $\sqrt{A}$ ebendieſelben ſind, ſo kann bis zum Glied μ^ϱ fortgefahren werden, wo $\frac{p}{q} = \sqrt{A}$, nemlich

lich $p^2 - Aq^2 = o$ ist. Man suche demnach zuerst den nächst kleinern Werth von $\frac{p}{q}$, nemlich $\sqrt{A}$, und diß wird der Werth von μ seyn; hierauf setze man in $p^2 - Aq^2 = o$ statt p seinen Werth $\mu q + r$; wodurch $(\mu^2 - A)\, q^2 + 2\mu q r + r^2 = o$ wird. Sodann suche man aufs neue den nächstkleineren Werth von $\frac{q}{r}$, das heißt, von der bejahten Wurzel der Gleichung

$$(\mu^2 - A)\left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\mu \cdot \frac{q}{r} + 1 = o,$$

so findet sich μ'.

Ferner setze man in der Gleichung

$$(\mu^2 - A)\left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\mu \cdot \frac{q}{r} + 1 = o,$$

statt q, den Werth $\mu r + s$, so ergibt sich eine Gleichung, deren Wurzel $\frac{r}{s}$ seyn wird. Der nächst kleinere Werth dieser Wurzel ist sodann μ''. Nun setze man aufs neue $\mu'' r + s$ statt r ꝛc.

Gesezt nun, t sey z. B. der lezte Ueberrest, der also $= o$ seyn muß, und s der vorlezte, der $= 1$ ist, und die in s und t verwandelte Formel $p^2 - Aq^2$ sey $Ps^2 + Qst + Rt^2$, so muß dieselbe für $t = o$, und $s = 1$, der Einheit gleich werden, wenn

$$p^2 - Aq^2 = 1$$

statt finden soll. Folglich muß $P = 1$ seyn. Die obigen Operationen und Substitutionen müssen demnach so weit fortgesezt werden, bis man auf eine Gleichung kommt, wo der Coefficient des ersten Glieds

Glieds $= 1$ ist. Dann setze man in dieser Formel die erste dieser zwei unbestimmten Grössen, z. B. $r = 1$, und die andre $s = 0$, so lassen sich, wenn man immer rükwärts gehet, dadurch die Werthe von p und q bestimmen.

Es läßt sich diese Rechnung auch auf folgende Art anstellen: Man abstrahire nemlich in

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

von dem bekannten Gliede 1, und folglich auch von allen übrigen bekannten Gliedern, welche bei Bestimmung der nächsten Werthe μ, μ', μ'' ꝛc. von

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{q}{r}, \quad \frac{r}{s}$$

vorkommen, und versuche bei jeder neuen Verwandlung, ob die verwandelte Gleichung bestehen könne, wenn eine der beiden unbestimmten Grössen $= 0$, und die andere $= 1$. gesezt wird. Ist man nun auf eine solche Verwandlung gekommen, so hört die Rechnung daselbst auf, und die Werthe von p und q lassen sich leicht finden, wenn man auf eben diesem Weg wieder rükwärts geht.

So wären wir also auf die Methode des 7ten Kapitels gekommen. Untersucht man dieselbe an und für sich selbst, und unabhängig von den daraus abgeleiteten Grundsätzen, so scheint es gleichgültig zu seyn, ob die nächsten Werthe von μ, μ', μ'' ꝛc. kleiner oder grösser, als die wahren genommen werden, weil in jedem Falle die Werthe von r, s, t ꝛc. immer mehr und mehr abnehmen, und endlich 0 werden (§. 6.)

Deswegen bemerkt auch Wallis man könne die Gränzen für die Zalen μ, μ', μ'' ꝛc. nach Belieben in plus oder minus annehmen, und schlägt dieses Mittel sogar vor, um öfters die Rechnung dadurch abzukürzen. Auch Euler §. 102 ꝛc. des 7. Kapitels, sagt eben diß. Nichts desto weniger aber werde ich durch ein einziges Beispiel zeigen, daß es bei dieser Art zu verfahren, geschehen könne, daß man niemals auf die Auflösung der vorgegebenen Gleichung kommt.

Als Beispiel wollen wir eben dasjenige nehmen, das im §. 101. des angezeigten Kapitels berechnet ist, wo nemlich die Gleichung $p^2 = 6q^2 + 1$, oder $p^2 - 6q^2 = 1$ aufgelößt werden soll. Es ist also $p = \nu(6q^2 + 1)$, oder, wenn das beständige Glied 1 hinweggeworfen wird, $p = \nu\, 6q^2 = q\,\nu\, 6$, also $\frac{p}{q} = \nu 6$, $> 2, < 3$;

Wir wollen die Gränze in Minus nehmen, und $\mu = 2$ seßen, also ist $p = 2q + r$; mithin, wenn man diesen Werth in die obige Gleichung seßt, ergibt sich

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1,$$

also

$$q = \frac{2r + \nu(6r^2 - 2)}{2},$$

oder, wenn man wiederum das beständige Glied -2 hinwegwirft,

$$q = \frac{2r + r\nu 6}{2},$$

wo

$$\frac{q}{r} = \frac{2 + \nu 6}{2} > 2, < 3 \text{ ist.}$$

Wir

Wir wollen auch hier wieder die Gränze in Minus nehmen, und $q = 2r + s$ ſetzen, ſo wird die lezte Gleichung

$$r^2 - 4rs - 2s^2 = 1,$$

woraus erhellet, daß man hier $r = 1$ und $s = 0$ ſetzen könne, welches $q = 2$ und $p = 5$ gibt.

Nun gehen wir noch einmal zur erſten Verwandlung

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1$$

zurük, wo wir geſehen, daß $\frac{q}{r} > 2 < 3$ ſeyn müſſe, und anſtatt die Gränze in Minus zu nehmen, laßt uns dieſelbe in Plus nehmen, und daher $q = 3r + s$, oder vielmehr, weil alsdenn s verneint iſt, $q = 3r - s$ ſetzen, ſo findet man dieſe Verwandlung:

$$-5r^2 + 8rs - 2s^2 = 1,$$

mithin

$$r = \frac{4s + \nu(6s^2 - 5)}{5},$$

oder wenn man das beſtändige Glied — 5 hinwegwirft,

$$\frac{r}{s} = \frac{4 + \nu 6}{5} > 1 < 2.$$

Man nehme aufs neue die Gränze in plus, und ſetze $r = 2s - t$, woraus $-6s^2 + 12st - 5t^2 = 1$, alſo

$$s = \frac{6t + \nu(6t^2 - 6)}{6},$$

und nach Hinwegwerfung von — 6

$$s = \frac{6t + t\nu 6}{6},$$

und

und daher

$$\frac{s}{t} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} > 1 < 2.$$

Es sey von neuem $s = 2t - u$, also die Gränze abermal in plus, so wird $-5t^2 + 12tu - 6u^2 = 1$, also

$$\frac{t}{u} = \frac{6 + \sqrt{6}}{5} > 1 < 2,$$

Man mache wieder $t = 2u - x$, woraus $-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1$, folglich ꝛc.

Fährt man nun auf diese Art fort, die Gränzen immer in plus zu nehmen, so wird man niemalen auf eine Gleichung kommen, in welcher der Coefficient des ersten Glieds der Einheit gleich ist, wie es doch seyn muß, wenn die Gleichung soll aufgelößt werden können.

Eben diß muß nothwendig immer geschehen, so oft die erste Gränze in Minus, und die folgenden alle in Plus genommen werden. Es wäre leicht, den Grund hievon a priori anzugeben: ich halte mich aber nicht hiebei auf, weil der Leser denselben aus den Grundsätzen unsrer Theorie leicht selbst finden kann, und begnüge mich daher, gezeigt zu haben, daß es nöthig sey, diese Probleme nach einer strengeren und gründlicheren Methode zu behandeln, als bisher geschehen ist.

Neuntes Kapitel.

Methode, die algebraiſchen Funktionen aller Grade zu finden, welche ineinander multiplicirt, immer ähnliche Funktionen hervorbringen.

Zuſaz zum 11. u. 12. Kapitel.

§. 88.

Ich glaube zugleich mit Euler auf den Gedanken gerathen zu ſeyn, die irrationalen und ſogar auch die eingebildeten Faktoren der Formeln des zweiten Grads zu gebrauchen, um diejenigen Bedingungen zu finden, unter welchen dieſe Formeln Quadraten oder andere Potenzen gleich werden. Ich habe über dieſe Materie im Jahr 1768 in der königlichen Akademie der Wiſſenſchaften eine Abhandlung vorgeleſen, welche zwar nicht gedrukt worden iſt, wovon ich aber am Ende meiner Unterſuchungen über die unbeſtimmten Probleme, die ſich in dem Bande vom Jahr 1767 befinden, und die alſo älter als die deutſche Ueberſetzung der Euleriſchen Algebra ſind, einen kurzen Auszug gegeben habe.

Ich habe daſelbſt nicht nur gezeigt, wie ebendieſelbe Methode auch auf Formeln von höheren Graden als vom zweiten angewandt werden kann, ſondern auch auf dieſem Weg einige Gleichungen aufgelößt, mit denen man auf jedem andern wahrſcheinlich ſehr ſchwer zu Stande gekommen wäre. Nun will ich dieſe Methode, die ſowol wegen ihrer Neuheit, als auch deswegen, weil ſie an und für ſich merkwürdig iſt, die Aufmerkſamkeit der Geometer verdient, noch allgemeiner zu machen ſuchen.

§. 89.

Es ſeyen α und β die zwei Wurzeln der Gleichung vom zweiten Grade

$$s^2 - as + b = o,$$

mit welcher wir das Produkt dieſer beiden Faktoren

$$x + \alpha y \text{ und } x + \beta y$$

das nothwendig wirklich ſeyn muß, vergleichen wollen. Nun iſt daſſelbe

$$x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2,$$

aber aus der Natur der Gleichungen folgt, daß

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b,$$

folglich hat man folgende Formel vom zweiten Grade

$$x^2 + axy + by^2$$

welche aus dem Produkt der beiden Faktoren $x+\alpha y$ und $x+\beta y$ beſteht.

Hat man alſo eine andre ähnliche Formel

$$(x')^2 + ax'y' + b(y')^2$$

und ſoll eine mit der andern multipliciren, ſo darf man nur dieſe beide Faktoren $x+\alpha y$ und $x'+\alpha y'$, und wieder dieſe beide $x+\beta y$ und $x'+\beta y'$, in einander, und ſofort das erſte Produkt durch das andre

multi-

multipliciren. Aber

$(x+\alpha y)(x'+\alpha y') = xx'+\alpha(xy'+yx')+\alpha^2 yy'$.

Da aber α eine von den Wurzeln der Gleichung $s^2-as+b=0$ ist, so ist $\alpha^2-a\alpha+b=0$, also $\alpha^2=a\alpha-b$. Sezt man nun diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so verwandelt sie sich in

$(x+\alpha y)(x'+\alpha y') = xx'-byy'+\alpha(xy'+yx'+ayy')$

oder, wenn der Kürze wegen,

$$X = xx' - byy'$$
$$Y = xy' + yx + ayy'$$

gesezt wird, in

$$(x+\alpha y)(x'+\alpha y') = X+\alpha Y$$

und folglich ist das Produkt dieser beiden Faktoren von eben der Form, wie jeder einzelne Faktor. Eben so findet sich, daß das Produkt der beiden andern Faktoren $x+\beta y$ und $x'+\beta y''$ gleich $X+\beta Y$ ist; mithin wird das ganze Produkt

$$(X+\alpha Y)\quad(X+\beta Y)$$

nemlich

$$X^2+aXY+bY^2$$

seyn; und diß ist also das Produkt der beiden ähnlichen Formeln

$x^2+axy+by^2$, und $(x')^2+ax'y'+b(y')^2$.

Wollte man das Produkt folgender drei Formeln haben

$$x^2+axy+by^2$$
$$(x')^2+ax'y'+b(y')^2$$
$$(x'')^2+a(x'')(y'')+b(y'')^2$$

so müßte man das Product von $X^2+aXY+bY^2$, durch den lezten Faktor $(x'')^2+ax''y''+b(y'')^2$ suchen. Aus den obigen Formeln aber erhellet, daß wenn

$$X' = Xx''-bYy''$$

und

$$Y' = Xy'' + Yx'' + aYy'',$$

gemacht wird, das geſuchte Produkt ſeyn werde,

$$(X')^2 + a\,X'Y' + b\,(Y')^2.$$

Auf eben dieſelbe Art läßt ſich auch das Produkt von vier oder mehr Faktoren, dergleichen

$$x^2 + axy + by^2$$

iſt, finden, und dieſes Produkt wird immer von ebenderſelben Form, wie die Faktoren ſelbſt, ſeyn.

§. 90.

Wenn $x' = x$, und $y' = y$; ſo iſt $X = x^2 - by^2$, und $Y = 2yx + ay^2$; und mithin

$$(x^2 + axy + by^2)^2 = X^2 + aXY + bY^2.$$

Wenn alſo die rationalen Werthe von X und Y geſucht werden, die ſo beſchaffen ſind, daß

$$X^2 + aXY + bY^2$$

ein Quadrat werde, ſo darf man nur ſtatt X und Y die vorhergehenden Werthe ſetzen, und dann wird die Quadratwurzel jener Formel

$$= x^2 + axy + by^2$$

ſeyn, wo x und y zwei unbeſtimmte Gröſſen vorſtellen.

Wenn überdiß $x'' = x' = x$, und $y'' = y' = y$, ſo wird $X' = Xx - bYy$, und $Y' = Xy + Yx + aYy$, oder, wenn ſtatt X u. Y ihre vorhergehenden Werthe geſetzt werden,

$$X^I = x^3 - 3bxy^2 + aby^3$$
$$Y^I = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3$$

folglich

$$(x^2 + axy + by^2)^3 = (X^I)^2 + X^IY^I + b(Y^I)^2$$

Wenn

Wenn also diejenige rationale Werthe von X' und Y' gesucht werden, die so sind, daß die Formel

$$(X^I)^2 + a\,X^I\,Y^I + b\,(Y^I)^2$$

ein Cubus wird, so muß man statt X^I und Y^I die vorhergehenden Werthe setzen, wodurch man sodann die vorgegebene Formel zu einem Cubus macht, dessen Wurzel $= x^2 + a\,x\,y + b\,y^2$ ist, wo x und y zwei unbestimmte Grössen vorstellen.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch diejenigen Formeln auflösen, wo die vierte, fünfte ꝛc. Potenzen vorkommen. Man kann aber überhaupt allgemeine Formeln für irgend eine Potenz m finden, wie jezt gezeigt werden soll.

Gesezt also, man soll diejenigen Werthe von X und Y finden, wodurch die Formel

$$X^2 + aXY + bY^2$$

eine mte Potenz wird, d. h. man soll die Gleichung

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^m$$

auflösen, so muß, da $X^2 + aXY + bY^2$ aus dem Produkt der beiden Faktoren

$$X + a\,Y, \quad X + b\,Y$$

entsteht, auch jeder dieser Faktoren ebenfalls einer mten Potenz gleich werden.

Man mache also

$$X + a\,Y = (x + a\,y)^m$$

und entwickle diese Potenz nach dem Binomischen Lehrsatze, so findet sich

$$X + a\,Y = x^m + m\,x^{m-1}\,y\,\alpha + \frac{m\,(m-1)}{2}\,x^{m-2}\,y^2\,\alpha^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2\cdot 3}\,x^{m-3}\,y^3\,\alpha^3 + \text{ꝛc.}$$

Da aber α eine der Wurzeln der Gleichung

$$s^2 - as + b = o$$

iſt; ſo iſt auch

$\alpha^2 - a\alpha + b = o$, mithin

$\alpha^2 = a\alpha - b$,

$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = (a^2 - b)\alpha - ab$

$\alpha^4 = (a^2 - b)\alpha^2 - ab\alpha = (a^3 - 2ab)\alpha - a^2b + b^2$

u. ſ. w.

Dieſe Werthe ſetze man in die vorhergehende Formel, welche ſodann aus zwei Theilen beſtehen wird, wovon der eine rational iſt, und $= X$ geſezt werden muß; der andre iſt mit α multiplicirt, und muß mit αY verglichen werden.

Es ſey der Kürze wegen,

$A^I = 1.$	$B^I = o.$
$A^{II} = a.$	$B^{II} = b.$
$A^{III} = aA^{II} - bA^I.$	$B^{III} = aB^{II} - bB^I$
$A^{IV} = aA^{III} - bA^{II}.$	$B^{IV} = aB^{III} - bB^{II}$
$A^V = aA^{IV} - bA^{III}.$	$B^V = aB^{IV} - bB^{III}$
ꝛc. ꝛc. ꝛc.	ꝛc.

ſo iſt

$$\alpha = A^I\,\alpha - B^I$$
$$\alpha^2 = A^{II}\,\alpha - B^{II}$$
$$\alpha^3 = A^{III}\,\alpha - B^{III}$$
$$\alpha^4 = A^{IV}\,\alpha - B^{IV} \quad \text{ꝛc.}$$

folglich wenn dieſe Werthe in obige Gleichung geſetzt, und die Glieder verglichen werden,

$$X = x^m - m\,x^{m-1}\,yB^I - \frac{m(m-1)}{2}\,x^{m-2}\,y^2\,B^{II}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}\,x^{m-3}\,y^3\,B^{III} - \text{ꝛc.}$$

$$Y = mx^{m-1}\,yA^I + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\,y^2\,A^{II}$$

+

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3A''' + \text{ꝛc.}$$

Da aber die Wurzel α in den Ausdrücken für X und Y nicht vorkommt, so ist klar, daß, wenn

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m$$

ist, auch

$$X + \beta Y = (x + \beta y)^m$$

seyn müsse. Multiplicirt man also diese beiden Gleichungen in einander, so findet sich

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + b^2)^m$$

und daher

$$Z = x^2 + axy + by^2,$$

wodurch also das Problem aufgelößt ist.

Wäre $a = 0$, so würden die vorhergehenden Formeln weit einfacher; denn man hätte alsdann $A^I = 1$, $A^{II} = 0$, $A^{III} = -b$, $A^{IV} = 0$, $A^V = b^2$, $A^{VI} = 0$, $A^{VII} = -b^3$ ꝛc. und $B^I = 0$, $B^{II} = b$, $B^{III} = 0$, $B^{IV} = -b^2$, $B^V = 0$, $B^{VI} = b^3$ ꝛc. mithin

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{m-4}y^4b^2 - \text{ꝛc.}$$

$$Y = mx^{m-1}y - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{m-5}y^5b^2 - \text{ꝛc.}$$

und diese Werthe werden der Gleichung

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m$$

Genüge leisten.

§. 91.

Laßt uns nunmehr zu den Formeln vom dritten Grade übergehen, und zu dieſem Ende die drei Wurzeln der Gleichung

$$s^3 - as^2 + bs - c = o,$$

durch α, β und γ vorſtellen.

Wir betrachten daher das Produkt folgender drei Faktoren:

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)\,(x+\beta y+\beta^2 z)\,(x+\gamma y+\gamma^2 z)$$

welches, wie man gleich ſehen wird, nothwendig rational iſt; denn dieſes Produkt iſt:

$$x^3 + (\alpha+\beta+\gamma)\,x^2 y + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,x^2 z + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,xy^2 + (\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)\,xyz + (\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)\,xz^2 + \alpha\beta\gamma y^3 + (\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta)\,y^2 z + (\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha)\,yz^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 z^3.$$

Aber aus der Natur der Gleichungen folgt

$$\alpha+\beta+\gamma = a;\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+ = b \text{ und } \alpha\beta\gamma = c.$$

Ferner iſt

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = a^2 - 2b.$$

$$\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = ab - 3c;$$

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha\beta\gamma = b^2 - 2ac;$$

$$\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta = (\alpha+\beta+\gamma)\,\alpha\beta\gamma = ac;$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,\alpha\beta\gamma = bc.$$

ſezt

ſezt man nun dieſe in obiges Produkt, ſo wird daſſelbe
$x^3+ax^2y+(a^2-2b)\,x^2z+bxy^2+(ab-3c)\,xyz$
$+(b^2-2ac)\,xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3$.
Und dieſe Formel hat die Eigenſchaft, daß, wenn man ſo viel andre ähnliche Formeln, als man will, in einander multiplicirt, das Prodrukt derſelben immer eine ähnliche Formel werden wird.

In der That, wenn wir annehmen, man ſuche das Produkt jener Formel durch dieſe:
$(x')^3+a(x')^2y'+(a^2-2b)\,(x')^2z'+bx'\,(y')^2$
$+(ab-3c)\,x'y'z'+(b^2-2ac)\,x'(z')^2+c\,(y')^3$
$+ac\,(y')^2z'+bcy'\,(z')^2+c^2\,(z')^3$; ſo iſt klar, daß man nur das Produkt dieſer ſechs Factoren zu entwickeln habe: $x+\alpha y+\alpha^2 z$, $x+\beta y+\beta^2 z$, $x+\gamma y+\gamma^2 z$, $x'+\alpha y'+\alpha^2 z'$, $x'+\beta y'+\beta^2 z'$, $x'+\gamma y'+\gamma^2 z'$. Man multiplicire daher erſtlich $x+\alpha y+\alpha^2 z$ mit $x'+\alpha y'+\alpha^2 z'$, ſo findet ſich $xx'+\alpha(xy'+yx')+\alpha^2\,(xz'+zx'+yy')+\alpha^3\,(yz'+zy')+\alpha^4\,zz'$. Da aber α eine von den Wurzeln der Gleichung $s^3-as^2+bs-c=0$, vorſtellt, ſo iſt $\alpha^3-a\alpha^2+b\alpha-c=0$, mithin $\alpha^3=a\alpha^2-b\alpha+c$, folglich $\alpha^4=a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha=(a^2-b)\,\alpha^2-(ab-c)\,\alpha+ac$; ſezt man nun dieſe Werthe in obige Gleichung und macht, der Kürze wegen,
$X=xx'-c\,(yz'+zy')+aczz'$;
$Y=xy'+yx'-b\,(yz'+zy')-(ab-c)\,zz'$;
$Z=xz'+zx'+yy'+a\,(yz'+zy')+(a^2-b)\,zz'$,

ſo wird jenes Produkt $= X + \alpha Y + \alpha^2 Z$ und alſo von eben der Form werden, als jeder einzelne Faktor. Da aber die Wurzel α in den Ausdrücken für X, Y und Z nicht vorkommt, ſo müſſen dieſe Gröſſen ebendieſelben bleiben, wenn α in β oder in γ verwandelt wird; weil alſo bereits

$(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x'+\alpha y'+\alpha^2 z') = X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$

ſo wird auch, wenn α in β und nachher in γ verwandelt wird,

$(x+\beta y+\beta^2 z)(x'+\beta y'+\beta^2 z') = X+\beta Y+\beta^2 Z$

und

$(x+\gamma y+\gamma^2 z)(x'+\gamma y'+\gamma^2 z) = X+\gamma Y+\gamma^2 Z$

ſeyn. Multiplicirt man alſo dieſe drei Gleichungen in einander, ſo erhält man auf der einen Seite das Produkt der beiden vorgegebenen Formeln, und auf der andern die Formel:

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - b)X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2 + cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3$$

welche leztere Formel, wie man ſiehet, jeder der beiden andern ähnlich iſt.

Wenn eine dritte Formel gegeben wäre, wie dieſe

$(x'')^3 + a(x'')^2 y'' + (a - 2b)(x'')^2 z'' + bx''(y'')^2 + (ab - 3c)x''y''z'' + (b^2 - 2ac)x''(z'')^2 + c(y'')^3 + ac(y'')^2 z'' + bcy''(z'')^2 + c^2(z'')^3,$

und man das Produkt dieſer Formel und der beiden vorhergehenden ſuchte, ſo müßte

$X' = Xx'' - c(Yz'' + Zy'') + acZz''$, $Y' = Xy'' + Yx'' - b(Yz'' + Zy'') - (ab - c)Zz''$; $Z' = Xz'' + Zx'' + Yy'' + a(Yz'' + Zy'') + (a^2 - b)Zz''$

geſezt

gesezt werden, wodurch das gesuchte Produkt sodann $=(X^I)^3+a(X^I)^2Y^I+(a^2-2b)(X^I)^2Z^I+bX^I(Y^I)^2$ $+(ab-3c)X^IY^IZ^I+(b^2-2ac)X^I(Z^I)^2+c(Y^I)^3$ $+ac(Y^I)^2Z^I+bcY^I(Z^I)^2+c^2(Z^I)^3$ gefunden wird.

§. 92.

Wenn $x^I = x$, $y^I = y$ und $z^I = z$ angenommen wird, so ist

$$X = x^2 - 2cyz + acz^2$$
$$Y = 2xy - 2byz - (ab-c)z^2$$
$$Z = 2xz + y^2 + 2ayz + (a^2-b)z^2.$$

und diese Werthe werden der Gleichung

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 + (a^2-2b)X^2Z + (ab-3c)XYZ + acY^2Z + (b^2-2ac)XZ^2 + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^2.$$

Genüge leisten, wo $V = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + (a^2-2b)x^2z + (ab-3c)xyz + acy^2z + (b^2-2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3$.

Wenn also z. B. folgende Gleichung aufgelößt werden müßte:

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 = V^2$$

wo a, b, c gegebene Grössen vorstellen, so müßte man Z, und also auch

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2-b)z^2 = 0$$

setzen: woraus

$$x = \frac{-y^2 + 2ayz + (a^2-b)z^2}{2z}$$

gefunden wird. Dieser Werth von x in die vorhergehenden Ausdrücke von X, Y und V gesezt, gibt sodann die allgemeinsten Ausdrücke für diese Grössen, die der vorgegebenen Gleichung Genüge leisten.

Diese

Dieſe Auflöſung iſt ſowol wegen ihrer Allgemeinheit, als wegen der Art merkwürdig, wie wir zu derſelben gelangt ſind; denn dieſe leztere iſt vielleicht die einzige, welche ohne groſſe Umwege zum Zwecke führet.

Ferner, wenn in den obigen Formeln $x''=x'=x$, $y''=y'=y$ und $z''=z'=z$ geſezt wird, ſo erhält man die Auflöſung der Gleichung

$$(X')^3+aX'^2Y'+(a^2-2b)X'^2Z'-bX'Y'^2+(ab-3c)X'Y'Z'+(b^2-2ac)X'Z'^2+cY'^3+acY'^2Z'+bcY'Z'^2+c^2Z'^3=V^3;$$

wo $V=x^3+ax^2y+(a^2-2b)x^2z+bxy^2+(ab-3c)xyz+(b^2-2ac)xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3$ iſt.

§. 93.

Um nun auch die Auflöſungen für höhere Potenzen zu finden, wollen wir, wie §. 90, das Problem allgemein betrachten, und demnach annehmen, es ſolle dieſe Gleichung aufgelöſt werden:

$$X^3+aX^2Y+(a^2-2b)X^2Z+bXY^2+(ab-3c)XYZ+(b^2-ac)XZ^2+cY^3+acY^2Z+bcYZ^2+c^2Z^3=V^m.$$

Da die Gröſſe, welche das erſte Glied dieſer Gleichung ausmacht, nichts anders iſt, als das Produkt dieſer drei Faktoren,

$X+\alpha Y+\alpha^2Z$, $X+\beta Y+\beta^2Z$, $X+\gamma Y+\gamma^2Z$,

ſo erhellet, daß wenn dieſes Produkt einer Potenz vom mten Grade gleich ſeyn ſolle, ein jeder einzelner Faktor dieſer Potenz gleich ſeyn müſſe.

Es

Es sey also

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m$$

aber diß leztere Glied, nach dem Neutonischen Lehrsaße entwickelt, gibt

$$x^m + mx^{m-1}(y+\alpha z)\alpha + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}(y+\alpha z)^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3}(y+\alpha z)^3\alpha^3 + \text{ꝛc.}$$

oder wenn man $y + \alpha z$ wirklich in seine verschiedene Potenzen erhebt, und nach α ordnet:

$$x^m + mx^{m-1}\alpha + \left(mx^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}y^2\right)\alpha^2 + \left(m(m-1)x^{m-2}yz + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3}y^3\right)\alpha^3$$

&c.

Da aber das Gesez der Glieder in dieser Reihe nicht deutlich in die Augen fällt, so wollen wir allgemein annehmen, es sey

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m = P + P^I\alpha + P^{II}\alpha^2 + P^{III}\alpha^3 + P^{IV}\alpha^4 + \text{ꝛc.}$$

wo

$$P = x^m.$$

$$P^I = \frac{myP}{x}.$$

$$P^{II} = \frac{(m-1)yP^I + 2mzP}{2x}.$$

$$P^{III} = \frac{(m-2)yP^{II} + (2m-1)zP^I}{3x}.$$

$$P^{IV} = \frac{(m-3)yP^{III} + (2m-2)zP^{II}}{4x} \text{ ꝛc.}$$

gefun-

gefunden wird, wie ſich durch Hülfe der Differential-Rechnung leicht zeigen läßt *).

Da aber α eine der Wurzeln der Gleichung

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0$$

vorſtellt, ſo iſt

$$\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0,$$

mithin

*) Es ſey nemlich $(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m = P + P'\alpha + P''\alpha^2 + P'''\alpha^3 + P^{IV}\alpha^4$ ꝛc., wo nur α als veränderlich betrachtet wird, P, P', P'' ꝛc. aber beſtändige Gröſſen, oder zu beſtimmende Funktionen von x, y, z und m ſind. Da nun dieſe Gleichung für jeden Werth von α richtig ſeyn ſoll, ſo muß ſie es auch für $\alpha = 0$ ſeyn. Aber in dieſem Fall verwandelt ſich $(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m$ in x^m, und die Reihe $P + P'\alpha + \alpha P''\alpha^2$ ꝛc. in P, mithin iſt $P = x^m$.

Wird nun die Gleichung $(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m = P + P'\alpha + P''\alpha^2 \ldots$ differenzirt, ſo ergibt ſich

$m(x+\alpha y+\alpha^2 z)^{m-1}(y+2\alpha z)\,d\alpha = (P' + 2P''\alpha + 3P'''\alpha^2 \ldots\ldots)\,d\alpha$

oder

$m(x+\alpha y+\alpha^2 z)^{m-1}(y+2\alpha z) = P' + 2P''\alpha + 3P'''\alpha^2 \ldots\ldots$

ſezt man hier abermal $\alpha = 0$, ſo findet ſich $mx^{m-1} \cdot y = P'$, mithin $P' = \frac{my \cdot P}{x}$.

Auf eine ähnliche Art findet man den Werth von P'', wenn man die Gleichung $m(x+\alpha y+\alpha^2 z)(y+2\alpha z) = P' + 2P''\alpha + 3P'''\alpha^2 \ldots$ aufs neue differenzirt, und ſodann wiederum $\alpha = 0$ ſezt, und ſofort ins Unendliche.

mithin

$$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c.$$

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac.$$

$$\alpha^5 = (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha;$$

$$= (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c. \text{ u. ſ. w.}$$

Iſt alſo der Kürze wegen,

$$A^I = 0.$$
$$A^{II} = 1.$$
$$A^{III} = a.$$
$$A^{IV} = aA^{III} - bA^{II} + cA^I$$
$$A^V = aA^{IV} - bA^{III} + cA^{II}$$
$$A^{VI} = aA^V - bA^{IV} + cA^{III} \text{ ꝛc.}$$

$$B^I = 1.$$
$$B^{II} = 0.$$
$$B^{III} = b.$$
$$B^{IV} = aB^{III} - bB^{II} + cB^I$$
$$B^V = aB^{IV} - bB^{III} + cB^{II}$$
$$B^{VI} = aB^V - bB^{IV} + cB^{III}$$

$$C^I = 0.$$
$$C^{II} = 0.$$
$$C^{III} = c.$$
$$C^{IV} = aC^{III} - bC^{II} + cC^I.$$
$$C^V = aC^{IV} - bC^{III} + cC^{II}.$$
$$C^{VI} = aC^V - bC^{IV} + cC^{III} \text{ &c.}$$

ſo wird

$$\alpha = A^I \alpha^2 - B^I \alpha + C^I$$
$$\alpha^2 = A^{II} \alpha^2 - B^{II} \alpha + C^{II}$$
$$\alpha^3 = A^{III} \alpha^2 - B^{III} \alpha + C^{III}$$
$$\alpha^4 = A^{IV} \alpha^2 - B^{IV} \alpha + C^{IV} \text{ &c.}$$

Sezt

Sezt man nun dieſe Werthe in den Ausdruk für $(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m$, ſo wird ſich finden, daß derſelbe aus drei Theilen beſtehet, wovon der erſte ganz rational, der zweite durchaus mit α, und der dritte durchaus mit α^2 multiplicirt iſt. Wenn man nun alſo den erſten mit X, den andern mit Y, und den dritten mit Z vergleicht, ſo findet ſich

$X = P + P^I C^I + P^{II} C^{II} + P^{III} C^{III} + P^{IV} C^{IV}$ ꝛc.

$Y = - P^I B^I - P^{II} B^{II} - P^{III} B^{III} - P^{IV} B^{IV}$ ꝛc.

$Z = P^I A^I + P^{II} A^{II} + P^{III} A^{III} + P^{IV} A^{IV}$ ꝛc.

und dieſe Werthe leiſten demnach der Gleichung

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m$$

Genüge. Da aber α in den Ausdrücken X, Y und Z gar nicht vorkommt; ſo iſt auf eben die Art auch, wenn α in β und γ verwandelt wird,

$$X + \beta Y + \beta^2 Z = (x + \beta y + \beta^2 z)^m$$

und

$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m$$

Multiplicirt man nun dieſe drei Gleichungen in einander, ſo iſt alſo

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - b) X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c) XYZ + (b^2 - 2ac) XZ^2 + cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3 = [x^3 + ax^2y + (a^2 - b) x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac) xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3]^m = V^m.$$

Auf dieſe Art finden ſich alſo die Werthe X, Y, Z und V, welche die drei unbeſtimmten Gröſſen x, y und z enthalten.

§. 94.

Wenn die Formeln von vier Dimensionen gesucht werden sollten, welche eben dieselben Eigenschaften hätten, wie diejenigen, die wir abgehandelt haben, so müßte man hier Factoren von dieser Form betrachten:

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t.$$
$$x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t.$$
$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t.$$
$$x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t.$$

Wären nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Wurzeln der Gleichung

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = o,$$

so würde auch hier

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a.$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta = b$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = d$$

seyn, und auf diese Weise liessen sich alle Coefficienten der verschiedenen Glieder des Produkts von dem die Rede ist, finden, ohne daß es nöthig wäre, die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ besonders zu wissen. Da aber verschiedne mühsame Reduktionen hiebei vorkommen, so läßt sich auf folgende, wie mich dünkt, leichtere Art, hiebei zu Werke gehen.

Man setze allgemein $x + sy + s^2 z + s^3 t = \varrho$, und da s durch die Gleichung $s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = o$ bestimmt ist, so eliminire man s auf die gewöhnliche Art aus diesen beiden Gleichungen, und ordne in der daraus entspringenden neuen Gleichung die Glieder nach ϱ, welche Grösse auf den vierten Grad steigen wird, so, daß diese Gleichung also vorgestellt werden kann $\varrho^4 - N\varrho^3 + P\varrho^2 - Q\varrho + R = o$.

Aber dieſe Gleichung in ϱ ſteiget nur deswegen auf den vierten Grad, weil s vier Werthe α, β, γ, δ haben kann, und ſo kann demnach auch ϱ folgende vier correſpondirende Werthe haben:

$$\alpha + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t.$$
$$\alpha + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t.$$
$$\alpha + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t.$$
$$\alpha + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t.$$

welche nichts anders als die Faktoren des oben bemeldten Produkts ſind. Weil aber das lezte Glied R das Produkt aller vier Wurzeln oder Werthe von ϱ ſeyn muß, ſo folgt, daß dieſe Gröſſe R das geſuchte Produkt ſey.

Doch genug von dieſer Materie, von welcher ich vielleicht an einem andern Orte mehr reden werde.

Hiermit beſchlieſſe ich dieſe Zuſätze, um nicht allzuweitläufig zu werden; vielleicht findet man das bisherige ſchon zu lang. — Da aber die Gegenſtände, die ich darinn abhandelte, meiſtens neu, oder wenig bekannt ſind, ſo glaubte ich etwas ausführlich ſeyn zu müſſen, um ſowol die Methoden, deren ich mich bediente, als ihre verſchiedenen Anwendungen in ihr gehöriges Licht zu ſetzen.

Tabelle

über die in dieſem Theile enthaltenen Materien.

Vorrede

Vorrede des Ueberſetzers

I. Kapitel. Von den fortlaufenden Brüchen 1

II. K. Methode, diejenigen ganzen Zalen zu beſtimmen, die unbeſtimmte Formeln mit zwei unbekannten Gröſſen in Minima verwandeln 55

III. K. Ueber die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen vom erſten Grad, mit zwei unbekannten Gröſſen, in ganzen Zalen. 122

IIII. K. Allgemeine Methode, Gleichungen mit zwei unbekannten Gröſſen, deren eine nicht über den erſten Grad ſteigt, in ganzen Zalen aufzulöſen. 131

V. K. Direkte und allgemeine Methode, die Werthe von x zu finden, welche den Ausdruk $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational machen, und die Gleichung $Ap^2 + Bq^2 = Z^2$, in ganzen Zalen aufzulöſen. 138

VI. K. Ueber die doppelten und dreifachen Gleichheiten. 156

VII. K. Directe und allgemeine Methode, alle Werthe von y in ganzen Zalen zu bestimmen, wodurch $\sqrt{(Ay^2+B)}$ rational gemacht werden kann, wenn A und B gegebene ganze Zalen bedeuten, und alle mögliche Auflösungen der unbestimmten Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen in ganzen Zalen zu finden. 161

Auflösnng der Gleichung $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$ in ganzen Zalen,

Erste Methode 166

Zweite Methode 170

Von der Art, aus einer einzigen bekannten Auflösung der Gleichung $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$, alle andere mögliche zu finden. 180

Methode, alle mögliche Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade, mit zwei unbekannten Grössen in ganzen Zalen zu finden. 190

VIII. K. Bemerkungen über die Gleichungen von der Gestalt $p^2=Aq^2+1$, und über die gewöhnliche Art, sie in ganzen Zalen aufzulösen. 215

IX. K. Methode, die algebraischen Funktionen aller Grade zu finden, welche ineinander multiplizirt, immer ähnliche Funktionen hervorbringen. 225

Anhang.

Anhang.

I.

Allgemeiner Beweiß des Binomiſchen Lehrſatzes.

§. 1.

Der Binomiſche Lehrſaz iſt von ſo groſſer Wichtigkeit, und ſeine Anwendung ſo vielfach, daß man ſich nicht wundern darf, wenn die Mathematiker, um denſelben in ſein gehöriges Licht zu ſetzen, ihn auf verſchiedene Arten zu erweiſen ſich bemühten. In der That, wenn man bedenkt, wie viele Beweiſe von dem Pythagoriſchen Lehrſatze, von den Parallellinien vorhanden ſind, und wie viel das Ganze durch dieſe Mannichfaltigkeit gewonnen hat, ſo wird auch, wie ich hoffe, eine neue Theorie des Binomiſchen Lehrſatzes, die vielleicht an Gründlichkeit keiner der bereits vorhandenen nachſteht, und noch überdiß aus den einfachſten Prämiſſen hergeleitet iſt, nicht ganz unangenehm ſeyn. Es iſt dabei gar nicht von Differenzialrechnung die Rede. Im Gegentheil habe ich mich bemühet, den ganzen Beweis aus den erſten Anfangsgründen der Algebra zu ſchöpfen.

§. 2.

Ehe ich aber zu dem wirklichen Beweiß übergehe, iſt es nöthig, einige Betrachtungen über die Summirung einiger Reihen, die übrigens auch ſchon an und für ſich, und auſſer ihrer Verbindung mit der Binomialformel merkwürdig ſind, voraus zu ſchicken.

Dieſe Reihen ſind nemlich diejenigen, deren allgemeine Ausdrücke

$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}; \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$
$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

ꝛc. ſind.

Was ich darüber zu ſagen habe, betrift den Beweiß für den Ausdruk der Summe, welcher auf eine ſolche Art geführt iſt, daß bei demſelben die Binomialformel nicht bereits zum Grund liegt.

§. 3.

Ich mache den Anfang mit der Reihe

1, 3, 6, 10, 15, 21 . . . . .

deren Glieder, wie bekannt, dadurch entſtehen, daß man immer vom erſten an, ſo viele Zalen in natürlicher Ordnung addirt, als die Anzal der Glieder beträgt.

Man ſetze nemlich die Reihe der natürlichen Zalen über dieſe zu betrachtende Reihe, ſo erhält man:

1 . 2 3 4 5 6 . . . . m.
1 3 6 10 15 21 . . . .

wo das zweite Glied 3 der untern Reihe die Summe

von

von den zwei ersten natürlichen Zalen 1 und 2 vorstellt. Eben so ist das dritte Glied 6 die Summe der drei ersten Zalen 1, 2 und 3, das vierte die Summe der vier ersten, und das mte Glied die Summe der m ersten Zalen. Nun ist die Summe von m Zalen, von denen die erste 1 ist, und die nach der Ordnung der natürlichen Zalen, d. i. um 1 zu nehmen

$$= \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}.$$

Folglich ist diß der Ausdruk des mten Glieds, und also auch der allgemeine Ausdruk der Reihe

$$1, 3, 6, 10, 15 \ldots \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$$

§. 4.

Damit nun die Methode, deren ich mich bei Summirung dieser und der folgenden Reihen bediene, deutlicher in die Augen falle, will ich der zu summirenden Reihe eine bestimmte Anzal von Gliedern geben, z. B. 5, und sofort die Schlüsse auf m Glieder ausdehnen: wobei es sich übrigens ergeben wird, daß die dabei gebrauchte Art zu schliessen mit der Anzal der Glieder nichts gemein hat, und also als vollkommen allgemein betrachtet werden kann.

§. 5.

Es sollen also zuerst 5, und hernach m Glieder der Reihe:

$$1, 3, 6, 10, 15 \ldots \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$$

summirt werden.

Hiebei kann man also verfahren: Da diese Summe, vermöge der Entstehung der gegebenen Reihe, auch also vorgestellt werden kann:
$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)$
und für m Glieder durch
$1+(1+2)+(1+2+3)\ldots+(1+2+3\ldots+m)$
so erhellet,

1) daß 1 so oft zu sich selbst addirt wird, als Glieder vorhanden sind; weil jedes derselben mit 1 anfängt; folglich ist die Summe aller Einheiten für 5 Glieder $5 \cdot 1$; und für m Glieder $= m \cdot 1$.

2) Auf eine ähnliche Art findet sich, daß die Zal 2 so oft zu sich addirt wird, als Glieder vorhanden sind, weniger Eins, weil sie erst im zweiten anfängt, und sofort in allen übrigen sich befindet. Die Summe aller Zweier ist also für 5 Glieder $=2(5-1)$, und für m Glieder $=2(m-1)$.

3) Eben so ist die Summe aller Dreier für 5 Glieder $= 3(5-2)$ und für m Glieder $= 3(m-2)$.

4) Die Summe aller Vierer für 5 Glieder ist $=4(5-3)$, für m Glieder $=4(m-3)$ ꝛc.

Folglich ist die gesuchte Summe für 5 Glieder
$= 1 \cdot 5 + 2(5-1) + 3(5-2) + 4(5-3) + 5(5-4) + 6(5-5)$,
und für m Glieder
$= 1 \cdot m + 2(m-1) + 3(m-2) + 4(-3) \ldots\ldots + (m+1)(m-m)$,
aber erstere ist auch:
$= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 5 - (2.1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6)$

oder

oder:

$= 5(1+2+3+4+5+6) - 2(1+3+6+10+15)$

ſezt man demnach $1+3+6+10+15 = S$ ſo iſt:

$$5(1+2+3+5\ldots.+6) - 2S = S$$

aber $1+2+3\ldots+6 = \frac{6 \cdot 7}{2}$, folglich

$$S = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Auf eben die Art findet ſich für m Glieder, deren Summe S′ heiſſen ſoll:

$$m \cdot 1 + 2m + 3m + 4m \ldots. + m(m+1)$$
$$- 2\left(1+3+6\ldots. + \frac{m(m+1)}{2}\right)$$
$$= 1+3+6+10\ldots. + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} = S'.$$

oder

$$m(1+2+3\ldots.+m+1) - 2S' = S'.$$

aber

$$1+2+3\ldots.+m+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2},$$

folglich

$$S' = \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Wenn alſo eine Reihe von m Zalen gegeben iſt, deren allgemeiner Ausdruk $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ iſt, ſo iſt ihre Summe $= \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

§. 6.

§. 6.

Von der Reihe 1, 3, 6, 10, 15.. $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$, gehe ich nun zu dieser über:

1, 4, 10, 20, 35, 56 ... $\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

deren mtes Glied die Summe von m Gliedern der Vorhergehenden ist, so wie m Glieder von dieser die Summe von den m ersten natürlichen Zalen vorstellen. Der allgemeine Ausdruk für das mte Glied dieser neuen Reihe, ist also nach dieser Entstehungsart:

$= \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Es wird daher die Methode diese Reihe zu summiren, der bei der vorhergehenden Gebrauchten ähnlich seyn.

§. 7.

Es seyen also vordersamst wiederum die 5 ersten Glieder der Reihe 1 . 4 . 10 . 20 . 35 .... und so fort m Glieder derselben zu summiren.

Da dieselbige aus der Vorhergehenden nach dem erwähnten Gesetze entstanden ist, so läßt sie sich auch also vorstellen:

1 2 3 4 5 .... m.

1 4 10 20 35 .... $\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

(1), (1+3), (1+3+6), (1+3+6+10), (1+3...+15),...

$(1+3+6+10.....+\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2},)$

folglich

folglich

1) wird 1 so oft zu sich selbst addirt, als Glieder zu summiren sind; weil jedes derselben mit 1 anfängt. Daher ist für fünf Glieder die Summe der Einheiten = 5 . 1 für m Glieder = m . 1.

2) Wird die Zal 3 so oft zu sich selbst addirt, als Glieder zu summiren sind, weniger Eins, weil sie vom zweiten Glied an, in jedem vorkommt. Also ist für 5 Glieder die Summe aller Dreier = 3 (5 − 1) und für m Glieder = 3 (m − 1).

3) Da die Zal 6 vom dritten Glied an in allen vorkommt, so ist die Summe aller 6 für fünf Glieder = 6 (5 − 2), und für m Glieder = 6 (m − 2).

Es ist daher die Summe S der fünf ersten Glieder

$$= 1 \cdot 5 + 3\,(5-1) + 6\,(5-2) + 10\,(5-3) + 15\,(5-4) + 21\,(5-5)$$

oder

$$5\,(1+3+6+10+15+21) - 3\,(1+4+10+20+35) = 5,$$

also

$$5\,(1+3+6\ldots+21) = S,$$

aber

$$1+3+6\ldots+21 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

also

$$S = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Eben so, wenn S′ die Summe der m ersten Glieder dieser Reihe vorstellt, findet man durch ähnliche Schlüsse:

S′ =

$$S' = m \cdot 1 + 3(m-1) + 6(m-2) \ldots\ldots + \frac{(m+1)(m+2)(m-m)}{1 \cdot 2},$$

oder

$$S' = m\left(1+3+6 \ldots + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}\right) - \left(1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \ldots + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}\right)$$

Aber das Produkt von drei Zalen in natürlicher Ordnung, als m, m+1, m+2, ist immer mit 3 theilbar, also ist auch $\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}$ mit 3 theilbar, folglich jedes Glied des Subtrahendus; folglich ist:

$$S' = m\left(1+3+6 \ldots + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}\right) - 3\left(1+4+10 \ldots + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)$$

aber

$$1+3+6 \ldots + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Folglich ist

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3S' = S';$$

also endlich

$$S' = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

1. Lehr-

1. Lehrſaz.

Wenn in der Reihe 1, a, b, c, d . . . . . deren Glieder nach dem Geſez

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\,\ldots\,(m+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots(n+1)}$$

fortrücken, die Summe der m erſten Glieder

$$= \frac{m(m+1)\,(m+2)(m+3)\ldots(m+n)\,(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)\,(n+2)}$$

iſt, und aus dieſen wieder eine neue Reihe formirt wird,

1, A, B, C, D &c,

deren mtes Glied die Summe der m erſten Glieder der vorhergehenden Reihe iſt, deſſen allgemeiner Ausdruk alſo

$$= \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots(m+n)\,(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)\,(n+2)}$$

iſt, ſo wird die Summe S von m Gliedern dieſer leztern Reihe

$$= \frac{m(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n)\,(m+n+1)\,(m+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\quad (n+1)\quad (n+2)\quad (n+3)}$$

ſeyn.

Beweiß.

Es ſey

1	2	3	4	5 . . .	m	m + 1
1	a	b	c	d . . .	p	q
1	A	B	C	D . . .	P	. . . . .

ſo iſt der allgemeine Ausdruk für

$$p = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n)}{1\cdot 2\cdot 3\quad (n+1)},$$

uns

und aus eben dem Grunde der für

$$q = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,\ldots\,(m+n+1)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,(n+1)}$$

ferner, nach dem Geſetze der Entſtehung der Reihe 1, A, B, C ꝛc. iſt der allgemeine Ausdruk für P

$$= \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,\ldots\,(m+n)\,(m+n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,(n+1)\,(n+2)}$$

Sodann folgt aus obigen Betrachtungen

$$S = m(1+a+b+c\ldots+q) - (a+2b+3c\ldots+mq)$$
$$= m\,(1+a+b\,.\,.\,.\,.\,.+q)$$
$$- \left(a+2b+3c\ldots+\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n+1)}\right)$$

Aber es iſt eine bekannte Eigenſchaft der Zalen, daß ein Produkt von zwei Faktoren, die in natürlicher Ordnung ſteigen, d. i. um 1 zunehmen, ſich durch 2 theilen läßt, ein Produkt von drei dergleichen Faktoren durch 3 ꝛc. Da nun

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,\ldots\,(m+n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,(n+1)}$$

ein ſolches Produkt iſt, ſo wird es ſich ebenfalls durch eine Zal theilen laſſen, welche die Menge dieſer Faktoren ausdrükt. Dieſe leztere iſt nun $=n+2$; denn erſtens begreift ſie diejenigen Faktoren, welche das Produkt hat, wenn n verſchiedene Werthe beigelegt werden, und dieſe Anzahl iſt ſo groß, als n Einheiten haben kann. Zweitens müſſen hiezu noch diejenigen gerechnet werden, welche das Produkt für $n=0$ hat, und dieſe ſind zwei, nemlich m, und $m+n+1$, oder $m+1$. Alſo iſt die Anzal aller Faktoren $=n+2$.

Folglich

Folglich läßt ſich

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n+1)}$$

mit n+2 theilen; das iſt: das allgemeine Glied der Reihe

$$a+2b+3c\ldots+\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n+1)}$$

läßt ſich damit theilen: folglich alle Glieder: folglich iſt

$$S = m\,(1+a+b\ldots+q)-(n+2)\left(\frac{a+2b+3c}{n+2}\ldots\frac{+m\,(m+1)\ldots(m+n+1)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\,(n+2)}\right)$$

Aber

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n+1n+2)}$$

iſt der allgemeine Ausdruk für alle Glieder von S, folglich iſt

$$\frac{a+2b+3c}{n+2}\ldots\frac{+m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)(n+2)}$$

S ſelbſten:

Alſo iſt auch

$$S = m\,(1+a+b\ldots+q)-(n+2)\,S$$

oder:

$$(n+3)\,S = m\,(1+a+b\ldots+q).$$

Aber $1+a+b\ldots+q$

$$= \frac{(m+1)\,(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)\;(m+n+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n+1)\;(n+2)}$$

folglich

$$S = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)(m+n+1)(m+n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1)(n+2)(n+3)}$$

welches zu erweisen war.

Binomischer Lehrsaz.

Dieser Saz lehret das Binomium $(a+b)^m$ entwickeln, oder es in eine Reihe verwandeln, welche dem Produkt von m gleichen Faktoren, wie $(a+b)$ gleich ist. Hiebei kommt nun zweierlei zu betrachten vor: Einmal das Gesez, nach welchem sich die Exponenten von a und b richten, und sodann dasjenige, welches die Coeffizienten beobachten.

Um nun die Untersuchung zu erleichtern, ist es, wie bekannt, schon genug, nur den Ausdruk $(1+x)^m$ zu betrachten, weil

$$(a+b)^m = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m a^m = (1+x)^m a^m \text{ ist.}$$

§. 9.

Es sey demnach der Ausdruk $(1+x)^m$ zu entwickeln, oder $1+x$ in die mte Potenz zu erheben, und vordersamst m eine ganze bejahte Zal, so ergeben sich vorerst folgende Betrachtungen:

1) Der Ausdruk für $(1+x)^m$ mag seyn welcher er will, so fängt derselbe doch immer für jedes m mit 1 an. Denn
$(1+x)^m$ $(1+x)(1+x)(1+x)\ldots\ldots$
Nun ist das Produkt aller ersten Glieder dieser m Faktoren $= 1^m = 1$, folglich ꝛc.

2)

2) Aus eben dem Grunde ist das lezte Glied $= x^n$; welches wie N° 1 erwiesen werden kann, wenn man
$(1+x)^m = (x+1)^m = (x+1)(x+1)\ldots\ldots$
sezt.

3) Der Ausdruk für $(1+x)^m$ ist einer Reihe gleich, deren jedes Glied, das erste ausgenommen, Potenzen von x enthält, deren Exponenten nach der Ordnung der natürlichen Zalen von 1 an steigen. Denn durch die Multiplication mit dem Faktor 1 bleiben alle niedere Potenzen vorhanden, und durch die Multiplication mit x wird die höchste Potenz des Multiplicandus um eine Einheit vermehrt. Nun gehen in $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$; alle Glieder nach dem erwähnten Gesetze fort; folglich auch alle höhere Potenzen.

4) Folglich ist
$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + x^m \ldots\ldots$
wo A, B, C ꝛc. keine Funktionen von x mehr seyn können, weil sonst die Reihe nicht so wäre, wie sie nach dem so eben erwiesenen seyn muß. Was es aber mit diesen Coefficienten für eine Beschaffenheit habe, wird sich sogleich zeigen.

2. Lehrsaz.

Wenn $1 + x$ in die $m + 1$te Potenz erhoben wird; so ist der Coefficient eines gewissen Glieds der hieraus entstehendenden Reihe gleich der Summe der Coefficienten eben desselben Glieds der mten Potenz und desjenigen des vorhergehenden Glieds dieser mten Potenz.

Beweiß.

Es ſey

$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 \ldots + Px^{m-2} + Qx^{m-1} + x^m$,

Wenn nun dieſe Reihe mit $(1+x)$ multiplicirt wird; ſo ergibt ſich

$(1+x)^{m+1} = 1 + (A+1)x + (A+B)x^2 \ldots$
$+ (P+Q)x^{m-1} + (Q+1)x^m + x^{m+1}$.

nemlich: Indem man zuerſt die Reihe

$1 + Ax + Bx^2 \ldots\ldots$

mit 1 multiplicirt, erhält man eben dieſelbe wieder. Indem man aber hernach auch mit x multiplizirt, erhält man in Abſicht der Coeffizienten zwar ebendieſelbe Reihe, aber die jedem Coefficienten zugehörige Potenz von x wird um 1 vermehrt. Folglich werden die Glieder der lezteren Reihe, um zu denen gleichartigen der erſteren addirt werden zu können, ſämmtlich um eine Stelle gegen die Rechte gerükt; folglich iſt in der Summe der Coefficient von x^{m-1} gleich dem Coefficienten von x^{m-1} der Reihe vor $(1+x)^m$ vermehrt um den Coefficienten von x^{m-2} dieſer leztern Potenz: oder es iſt $P+Q$ der Coeffizient von x^{m-1} in $(1+x)^{m+1}$.

§. 10.

Es iſt alſo der Coeffizient von x^q in $(1+x)^{m+n}$ gleich der Summe aller Coeffizienten von x^{q-1} der Potenzen $(1+x)^m$, $(1+x)^{m-1}$, bis $(1+x)^{m+n-1}$ vermehrt um den Coeffizienten von x^q in $(1+x)^m$. Denn wenn man die Potenz $(1+x)^{m+1}$ abermal mit $1+x$ multiplicirt, ſo gilt von den Coeffizienten der hieraus entſpringenden Reihe eben das, was wir für $(1+x)^{m+1}$ erwieſen haben, und ſofort ins Unendliche.

Es

Es sey also

$(1+x)^m = 1 + A\,x + B\,x^2 \ldots + P\,x^{q-1} + Q\,x^q \ldots$

$(1+x)^{m+1} = 1 + A'x + B'x^2 \ldots + P'x^{q-1} + Q'x^q \ldots$

$(1+x)^{m+2} = 1 + A''x + B''x^2 \ldots + P''x^{q-1} + Q''x^q \ldots$

. . . . . .

Ferner

$(1+x)^{m+n-1} = 1 + A^{n-1}x \ldots + P^{n-1}x^{q-1} + Q^{n-1}x^q \ldots$

$(1+x)^{m+n} = 1 + A^n\,x \ldots + P^n\,x^{q-1} + Q^n\,x^q \ldots$

wo übrigens, wie deutlich erhellet, A, A'', A^{n-1} ꝛc. willkührlich bezeichnete Coeffizienten vorstellen. So ist $Q'' = Q' + P'$; da aber Q' selbst wider $= Q + P$ ist: so wird dadurch $Q'' = Q + P + P'$. Auf eine ganz ähnliche Art zu schliessen findet sich nach diesen Grundsätzen

$$Q^n = Q + P + P' + P'' + P''' \ldots\ldots + P^{n-1}$$

§. 11.

Wenn demnach die zweite Potenz von $1 + x$, nemlich $1 + 2x + x^2$ als bekannt angenommen wird, so lassen sich die übrigen durch bloses Addiren finden, wobei ich mich aber nicht aufhalten will.

Aufgabe.

Man soll die Potenz

$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 \ldots\ldots + x^m$,

durch Bestimmung der Coeffizienten aus den bisherigen Gesetzen allgemein entwickeln.

Auflösung.

1) A besteht aus der Summe so vieler Einheiten, als das Produkt $(1+x)^m$ Faktoren hat, weniger

1, vermehrt um den Coeffizienten von x in $1 + x$; d. i. $A = m - 1 + 1 = m$. Diß iſt alſo der allgemeine Ausdruk des Coefficienten aller zweiten Glieder von $1 + x^m$.

2) B iſt die Summe aller Coeffizienten von x^1, von der zweiten Potenz von $(1+x)$ bis auf die $m - 1$te Potenz, vermehrt um die Einheit, als Coeffizient von x^2 in $(1+x)^2$: oder

$$B = 1 + 2 \ldots\ldots + m - 1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2},$$

welches alſo der allgemeine Ausdruk aller Coeffizienten der dritten Glieder in $(1+x)^m$ iſt.

3) C beſteht aus der Summe aller Coeffizienten von x^2, von der dritten Potenz von $1 + x$ an, bis auf die $m - 1$te, vermehrt um die Einheit, als Coeffizient von x^3 in $(1+x)^3$.

Es iſt aber nach dem ſo eben Erwieſenen der Ausdruk der Coeffizienten von x^2 für die mte Potenz

$$= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2};$$

Alſo für die $m - 1$te Potenz

$$= \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2},$$

mithin iſt

$$C = 1 + 3 \ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}.$$

Die Anzal der Glieder, die hier ſummirt werden ſollen, iſt demnach ſo groß, als die Anzal der

der Faktoren die mit $(1+x)^2$ multiplicirt, die Potenz $(1+x)^{m-1}$ hervorbringen, vermehrt um 1; das ist: dieſe Anzal, die ich y heiſſen will $= m-2$, folglich $C = 1 + 3 \ldots\ldots + \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2}$,

mithin nach dem obigen $C = \frac{y(y+1)(y+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

oder $$C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

welches daher der allgemeine Ausdruk des vierten Glieds in $(1+x)^m$ iſt.

4) D als Coeffizient von x^4 in $(1+x)^m$ beſteht aus der Summe der Coeffizienten von x^3 von der vierten Potenz vo $(1+x)$ bis auf die $m-1$te Potenz, vermehrt um die Einheit, als Coeffizient von x^4 in $(1+x)^4$. Es iſt aber allgemeiner Ausdruk des Coeffizienten von x^3 für die mte Potenz

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

mithin derjenige für den Coeffizienten von x^3 in der $m-1$ten Potenz

$$= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

folglich iſt

$$D = 1 + 4 \ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Die Anzal der hier zu ſumirenden Glieder iſt nun wiederum gleich der Anzal der Faktoren, die mit $(1+x)^3$ multiplizirt $(1+x)^{m-1}$ hervorbringen, ver-

mehrt um 1; heißt daher dieſe Anzal wieder wie oben y, ſo iſt $y = m - 3$, alſo

$$D = 1 + 4 \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y\,(y+1)\,(y+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

oder

$$D = \frac{y\,(y+1)\,(y+2)\,(y+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

oder

$$D = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

§. 12.

Um nunmehr auf einen allgemeinen Ausdruk zu kommen, ſey

$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 \ldots\ldots + Lx^{n-1} + Mx^n \ldots\ldots + x^m$.

wo L und M die Coeffizienten zweier aufeinander folgenden Glieder vorſtellen.

Es beſteht demnach M aus der Summe aller Coeffizienten von x^{n-1} von der nten Potenz von $(1+x)$ bis auf die $m - 1$te, vermehrt um die Einheit, als Coeffizient von x^n in $(1+x)^n$. Die Anzal y der zu ſummirenden Glieder iſt alſo ſo groß, als die Anzal der Faktoren, die mit $(1+x)^{n-1}$ multiplicirt, die Potenz $(1+x)^{m-1}$ hervorbringen, vermehrt um 1, oder es iſt $y = m - n + 1 = m - (n-1)$.

Es iſt aber der allgemeine Ausdruk des Coeffizienten von x^{n-1} für die $m - 1$te Potenz

$$= \frac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3) \ldots\ldots [\,m-(n-1)\,]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots n-1}$$

$$= \frac{y\,(y+1)\,(y+2) \ldots\ldots (y+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n-1}.$$

Alſo

Also ist

$$M = \frac{y\,(y+2)\,(y+2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(y+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\ldots\ldots\,n}$$

oder endlich

$$M = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\ldots\,n}$$

Aber der allgemeine Ausdruk des Coeffizienten von x^{n-1} für die $m-1$te Potenz ist für das zweite, dritte, vierte, fünfte Glied in

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots\ldots$$

richtig, also auch M für das dritte, vierte, fünfte und sechste, und folglich für alle folgende.

§. 13.

Wenn demnach m eine ganze bejahte Zal bedeutet, so ist

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,n}\,x^n \ldots + x^m.$$

3. Lehrsaz.

Wenn in der Reihe $P = 1 + ax + bx^2 \ldots\ldots + px^n$ die Coeffizienten nicht nach dem Gesez der Binomialformel $(1+x)^n$ fortgehen, sondern nach irgend einem andern: Wenn also P nicht $= (1+x)^n$ ist, und es wird diese Reihe mit $(1+x)^m = 1 + mx$

$$+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2\ldots\ldots\ldots\ldots$$

multiplicirt: So gehen im Produkte die Coeffizienten ebenfalls nicht nach dieser Binomialformel fort.

Beweiß.

$$P(1+x)^m = 1+(a+m)x+\left[b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\right]x^2\ldots\ldots$$

Giengen nun die Glieder dieser Reihe nach der Binomialformel, so wären sie, weil nach den obigen Gesetzen der Coeffizient von x^1, immer gleich dem Exponenten der zu erhebenden Potenz von $(1+x)$ ist, aus der Entwickelung von $(1+x)^{a+m}$ entstanden: folglich wäre $P(1+x)^m = (1+x)^{a+m}$, und mithin gegen die angenommene Bedingung, $P = (1+x)^a$.

4. Lehrsaz.

Man darf in

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2\ldots\ldots\ldots\ldots$$

den Werth von m auch verneint nehmen, oder das bisher entdekte Gesez gilt auch für negative Exponenten.

Beweiß.

Da

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = \frac{1}{1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2\ldots\ldots}$$

ist,

iſt, und bei der wirklichen Diviſion alle Potenzen von x, von x^0 an vorkommen, weil ſie alle im Nenner vorhanden ſind, und der Zäler 1 iſt, ſo iſt alſo $(1+x)^{-m} = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots\ldots$ wo die Coeffizienten einſtweilen noch unbeſtimmt ſeyn ſollen.

Nun werde $(1+x)^{-m}$ mit $(1+x)^n$ multiplizirt, ſo erhält man $(1+x)^{n-m}$: Sezt man demnach $n > m$, und $n - m = p$, ſo iſt nach dem vorhergehenden

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 \ldots.$$

Nun iſt $(1+x)^n$ ebenfalls

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 \ldots..$$

Wenn alſo die Reihe von $(1+x)^{-m}$ nicht nach den Geſetzen des Binomiſchen Lehrſatzes fortliefe, ſo könnte auch die vor $1+x)^p$ welche durch die Multiplication von $1 + \alpha x + \beta x^2 \ldots\ldots$ mit

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 \ldots..$$

entſpringt, nicht nach dem Binomiſchen Lehrſatze fortgehen, (wie im vorhergehenden Satze erwieſen worden iſt.) Folglich ꝛc.

§. 14.

Wenn daher in $(1+x)^m$ der Werth von m verneint genommen wird, findet ſich:

$(1+x)$

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \ldots\ldots$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots} \cdot \frac{(m+n)}{n+1} x^{n+1}$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(m+n+1)}{(n+2)} x^{n+2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

II.

Neue Methode, die Theiler der Zalen zu finden.

Die Lehre von den Primzalen und den Theilern der Zalen ist bei weitem noch nicht nach Verhältnis ihrer Wichtigkeit bearbeitet. Nicht einmal auszeichnende allgemeine Merkmale sind bekannt, durch welche sich erstere von den lezteren unterscheiden lassen. Indessen finden sich in den vortreflichen Schriften von Euler, Lambert ꝛc. sehr sinnreiche Untersuchungen über diese Materie. Besonders gab lezterer in seinen Beiträgen einige Methoden, die Theiler der Zalen zu entdecken. Daß sie aber dennoch bei weitem die Sache nicht erschöpfen, ausserdem daß sie äusserst indirekt sind, und oft sehr lange Rechnungen erfordern, werde ich wol hier nicht erst erweisen dürfen. Es wird daher den Liebhabern dieser Gattungen von Problemen vielleicht nicht ganz unangenehm seyn, wenn ich ihnen folgende Untersuchungen über diesen Gegenstand vorlege, und dadurch einen Weg zur allgemeinsten Auflösung der Frage von den Theilern der Zalen bahne.

Aufgabe.

Aufgabe.

Wenn A eine ungerade, aus den ungeraden Faktoren, m und n bestehende Zal bedeutet, ein z zu finden, welches so beschaffen ist, daß $A + z^2$ ein Quadrat in ganzen Zalen werde.

Auflösung.

Man setze

$$m \cdot n + z^2 = y^2;$$

so ist:

$$m \cdot n = y^2 - z^2,$$

oder:

$$m \cdot n = (y+z) \cdot B \cdot \frac{(y-z)}{B},$$

wo B jede Zal bedeuten kann.

Nun mache man folgende Vertheilung:

$m = (y + z) \cdot B$ und $n = \frac{y - z}{B}$, und eliminire aus beiden Gleichungen y; so findet sich $z = \frac{m - nB^2}{2B}$;

und dieser Werth verwandelt sich für

$B = 1$ in

$$z = \frac{m-n}{2};$$

welches immer eine ganze Zal ist.

Saz.

Wenn die Zal A eine Primzal ist, so gibt es nur eine einziges z, das so ist, daß $A + z^2$ ein Quadrat in ganzen Zalen wird. Ist aber A keine Primzal,

so

so kann man wenigstens zwei verschiedene z angeben, deren Quadrate zu A addirt, wiederum ein Quadrat in ganzen Zalen hervorbringen.

Beweiß.

Wenn die Faktoren von einer Zal A, m und n heissen; so wird, nach der Auflösung der ersten Aufgabe, in $A + z^2 = y^2$, $z = \frac{m - n}{2}$ seyn.

Wenn nun A eine Primzal ist, so hat sie keine andre Faktoren, als $A = m$, und $1 = n$, mithin gibt es für diesen Fall nur ein einziges $z = \frac{A - 1}{2}$, dessen Quadrat zu A addirt, wieder ein Quadrat in ganzen Zalen wird.

Ist aber A keine Primzal, so hat sie ausser den Faktoren A und 1 noch andre, als m und n; folglich gibt es hier ein $z = \frac{A - 1}{2}$ und ein anderes $= \frac{m - n}{2}$, wovon diß leztere kleiner seyn muß, als das erstere.

Hier hätten wir also ein unterscheidendes Kennzeichen der Primzalen gefunden. Gesezt nemlich es werde, um zugleich einige Beispiele zu geben, gefragt, ob 143 eine Primzal sey, oder nicht? so kommt es also darauf an, ob es ausser $z = \frac{143 - 1}{2} = 71$ noch ein kleineres gibt, dessen Quadrat zu 143 addirt, wieder ein Quadrat wird, und da hier sogleich erhellet, daß

daß $143 + 1 = 144 = 12^2$ ist, und mithin $z = 1$ ebenfalls eine Genüge leistet, so folgt ohne weiteres, daß 143 keine Primzal seyn könne.

Hingegen ist z, B. 29 eine Primzal, denn ausser $z = \frac{29-1}{2} = 14$ findet sich keine kleinere Zal, deren Quadrat zu 29 addirt wieder ein Quadrat gibt, welches daraus zu ersehen, weil zu 29 nach und nach alle ungerade Zalen von 1 bis 29 addirt werden können, ohne daß man auf eine andre Quadratzal kommt, als diejenige, welche durch $z = \frac{29-1}{2} = 14$ gefunden wird.

Daß man aber nicht nöthig habe, eine solche mühsame Addition wirklich vorzunehmen, werden wir weiter unten zeigen.

Aufgabe.

Aus einem bekannten z, welches $A + z^2$ zu einem vollkommnen Quadrat in ganzen Zalen macht, und kleiner ist, als $\frac{A-1}{2}$ die Faktoren von A zu finden.

Auflösung.

Gesezt diese Faktoren seyen m und n, so ist also $A = mn$ und $z = \frac{m-n}{2}$, woraus $m = z + \nu(A+z^2)$ und $n = -z + \nu(A+z^2)$ gefunden wird.

1. Beiſpiel.

Man ſucht die Faktoren von A = 493. Hier iſt

$493 + 1^2 = 493 + 1 = 494$
$493 + 2^2 = 493 + 1 + 3 = 497$
$493 + 3^2 = 493 + 1 + 3 + 5 = 502$
$493 + 4^2 = 493 + 1 \ldots\ldots + 7 = 509$
$493 + 5^2 = 493 + 1 \ldots\ldots + 9 = 518$
$493 + 6^2 = 493 + 1 \ldots\ldots + 11 = 529 = 23^2$

alſo $z = 6$; mithin

$$m = 6 + \sqrt{(493+36)}$$

oder

$$m = 6 + 23 = 29$$

und

$$m = -6 + 23 = 17$$

deren Produkt auch wirklich 493 gibt.

2. Beiſpiel.

Es ſey $A = 53297$; ſo findet ſich hier, wenn man alle ungerade Zalen von 1 bis 15 addirt, $53297 + 8^2 = 53361 = 231^2$, folglich iſt $z = 8$, alſo $m = 8 + 231 = 239$ und $n = -8 + 231 = 223$.

Wenn man alſo eine Methode hätte, auf eine kurze Art für jedes A dasjenige z, das kleiner, als $\frac{A-1}{2}$, iſt, zu finden, deſſen Quadrat zu A addirt, wiederum ein Quadrat wird, ſo wäre das Problem von den Theilern der Zalen auf das vollſtändigſte aufgelöſt.

Folgende Betrachtungen werden nun auf eine ſolche Methode führen, die zwar nicht in allen Fällen

nur kleine Rechnungen erfordert, aber doch ihrer Einfachheit wegen immer brauchbar ist.

Man mache vorderſamſt folgende Reihen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	.....
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	.....
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	.....
		8	12	16	20	24	28	32	36	.....
			15	21	27	33	39	45	51	.....
				24	32	40	48	56	64	.....
					35	45	55	65	75	.....

&c.

welche durch die Subtraction der in der zweiten Reihe bezeichneten Quadrate der natürlichen Zalen entſtehen.

Wenn man aber die Anfangsglieder dieſer Differenzreihen 3, 8, 15, 24, 35 ꝛc. betrachtet, ſo findet ſich leicht, daß ſie ſelbſt wiederum eine Progreſſion bilden, deren allgemeiner Ausdruk für das Glied $n = n(n+2)$ iſt. Dieſe Reihe ſoll die ſenkrechte heiſſen. Sodann iſt jedes Glied $n(n+2)$ dieſer ſenkrechten Reihe Anfangsglied einer Horizontalreihe deren Unterſchied $= 2n$ iſt; folglich iſt der allgemeine Ausdruk für ein Glied x einer Horizontalreihe, deren erſtes Glied $n(n+2)$ iſt,

$$= n(n+2) + 2n(x-1) = n^2 + 2nx,$$

das heißt: das xte Glied der nten Horizontalreihe $= n^2 + 2nx$: ſo iſt, z. B. das 4te Glied der 5ten Horizontalreihe $= 5^2 + 2.5.4 = 65$. Diß vorausgeſchikt, ſo ſey A eine gegebene ungerade Zal. Iſt ſie eine Primzal, ſo kann ſie, nach dem oben erwieſenen Saze, nur der Unterſchied zweier Quadrate

ſeyn,

seyn, und muß also allein in der ersten Horizontalreihe vorkommen, die mit 3 anfängt. Ist sie aber keine Primzal, so muß sie ein Unterschied mehrerer Quadrate seyn, und mithin auch ausser der ersten Horizontalreihe wenigstens noch in einer der folgenden vorkommen. Hierauf gründet sich nun folgende Methode, diese Quadrate zu finden, deren Unterschied A ist.

Man mache zuerst $n(n+2) = A$; denn, da dieser Ausdruk der allgemeine Ausdruk für die Glieder der senkrechten Reihe ist, so wird sich daraus finden lassen, ob A darinn vorkommt. Es wird nehmlich $n = \sqrt{(A+1)} - 1$ werden. Ist daher dieser Ausdruk keine rationale Zal, so kommt A auch nicht darinn vor. Da aber sowol die horizontalen als senkrechten Reihen immer wachsen, so zeigt dieser Werth von n zugleich die Gränze an, über welche hinaus A sowol in der senkrechten, als in den horizontalen Reihen nicht mehr zu suchen ist.

Wenn nun A in einer oder mehreren von den $n = \sqrt{(A+1)} - 1$ Horizontalreihen vorkommt, und darinn das xte Glied ist; so muß also $n^2 + 2nx = A$ und mithin, für ein bestimmtes n, $x = \frac{A - n^2}{2n}$ seyn.

Man nehme also, weil A eine ungerade Zal ist, und die Horizontalreihen abwechslungsweise gerad und ungerad sind, statt n alle ungerade natürliche Zalen, und formire zwei Reihen: eine von $A - n^2$, indem man ihr Quadrat nach und nach von A abziehet, und die andre von 2n; so wird dasjenige x, wo 2n das gemeinschaftliche Maas von $A - n^2$ und von 2n ist, das Glied seyn, in welchem A zu finden ist; demnach wird auch A der Unterschied der Quadrate

von $n + x$ und von x seyn müssen, woraus sich sodann nach obigem die Factoren finden lassen.

Beispiel.

Man sucht die Faktoren von 203.

Auflösung.

Da hier $A = 203$, und also $A + 1 = 204$: so ist zuerst für die senkrechte Reihe $n^2 + 2n = 204$, mithin $n < 14$: folglich hat man nur die 13 ersten, und wegen den geraden Reihen, welche hinwegfallen, nur die sieben ersten ungeraden Horizontalreihen zu untersuchen, welches in folgender Tabelle vorgestellt wird.

n	$A - n^2$	2n	$x = A - n^2$
1	$203 - 1 = 202$	2	101
3	$203 - 9 = 194$	6	—
5	$203 - 25 = 178$	10	—
7	$203 - 49 = 154$	14	11
9	$203 - 81 = 122$	18	—
11	$203 - 121 = 82$	22	—
13	$203 - 169 = 34$	26	—

Wenn man die Werthe von $A - n^2$ und von $2n$ vergleicht, so findet, sich daß nur $n = 1$ und $n = 7$ so sind, wie es die Bedingung erfordert. Folglich ist 203 keine Primzal, indem sie ein Unterschied von vier Quadraten ist, nemlich von 102 und 101, und von $n + x = 18$ und von $x = 11$. Die erstere führen uns auf nichts; durch die beiden andern lassen sich aber die Faktoren m und n nach der obigen Regel dadnrch finden, daß

$m = z + \sqrt{(A + z^2)}$ und $n = -z + \sqrt{(A + z^2)}$

gesezt

geſezt wird. Nun iſt hier $z = 11$ und

$$\sqrt{(A + z^2)} = 18,$$

folglich $= m = 11 + 18 = 29$ und $n = -11 + 18 = 7$, und mithin $203 = 7 \cdot 29$.

2. Beiſpiel.

Man ſucht die Faktoren 5423.

Auflöſung.

n	$A - n^2$	2n	x
1	5422	2	2711
3	5414	6	—
5	5398	10	—
7	5374	14	—
9	5342	18	—
11	5302	22	241

Hier kommt nun 241 ſchon in der ſechſten Reihe zum Vorſchein: Es iſt alſo 5423 der Unterſchied der Quadrate von $n + x$ und x, oder von 252 und 241; mithin

$$m = 252 + 241 = 493$$

und der andre Faktor n

$$= 252 - 241 = 11$$

Wenn aber die gegebene Zal A eine Primzal iſt; ſo findet ſich dieſes daraus, daß A nur ein Unterſchied von zwei Quadraten iſt, wie aus folgendem Beiſpiel erhellet.

Beiſpiel.

Man ſucht die Faktoren von 113.

Auflösung.

n	$A-n^2$	2n	x
1	112	2	56
3	104	6	—
5	88	10	—
7	64	14	—
9	32	18	—

Da sich hier nur ein einziger Werth für x findet, so hat auch 113 keine andre Faktoren, als 1 und 113, und ist folglich eine Primzal.

Durch Hülfe einer Quadrattafel, dergleichen den Logarithmischen Tabellen angehängt sind, läßt sich nun jedesmal die Colonne $A - n^2$ sehr leicht berechnen, und da man mit Recht voraussetzen darf, daß die Faktoren aller niedrigen Zalen als A, bereits bekannt seyen, so hat auch die Vergleichung der Werthe von 2n und $A-n^2$, durch deren Division x gefunden wird, keine Schwierigkeit.

Daß diese Berechnung, besonders bei grossen Zalen, noch sehr mühsam ist, gestehe ich gerne: allein eines Theils entwikeln sich doch bei unzählig-vielen andern die Faktoren sehr bald, und anderntheils ist es vielleicht einem günstigen Umstande aufbehalten, daß diese Methode noch weit einfacher wird gemacht werden können.

Anmerkung.

In den Abhandlungen der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften auf das Jahr 1786 findet S. 123 — 159 ein sehr interessanter Aufsaz von dem Grafen von Schafgotsch über einige Eigen-

Eigenſchaften der Prim- und zuſammengeſezten Zalen, worinn das Problem, die Theiler der Zalen zu beſtimmen, auf die Verwandlung von $an^2 + 1$ in ein vollkommnes Quadrat zurükgeführt wird. Um einigen Begrif von den darinn enthaltenen, alle Aufmerkſamkeit verdienenden, Sätzen zu geben, will ich das Weſentliche davon, jedoch ohne Beweiß, hier anführen, und im übrigen den Leſer auf die angeführte Abhandlung ſelbſt verweiſen.

1) Wenn a eine Primzal, oder eine vollſtändige Potenz einer Primzal iſt, ſo iſt das kleinſte y, das den Ausdruk $ay + 1$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen macht, $= a - 2$. Iſt aber a eine zuſammengeſezte Zal, ſo gibt es, auſſer dem Werth $y = a - 2$, wenigſtens noch einen kleineren, ebenfalls in ganzen Zalen, wodurch $ay + 1 = x^2$ wird. Hätte man alſo eine allgemeine Methode, für jedes gegebene a, die Gleichung $ay + 1 = x^2$ in ganzen Zalen aufzulöſen, d. i. für jedes a, von $x = 0$ an, alle Werthe dieſer lezteren Gröſſe in ganzen Zalen zu beſtimmen, wodurch $ay + 1$ ein Quadrat wird, ſo wäre die Frage, ob a eine Primzal ſey, oder nicht, von ſelbſt aufgelößt. Allein, ſo einfach die Gleichung $ay + 1 = x^2$ ſcheint, ſo ſchwer iſt ihre allgemeine Auflöſung. Man ſetze alſo, um durch einen Umweg zum Hauptzwecke zu kommen,

2) $x = z^2$, wo demnach $az^2 + 1 = x^2$ ſeyn muß, und dieſe Gleichung iſt für jedes bejahte a, das keine Quadratzal iſt, auflösbar; denn entweder iſt

α) das kleinste z^2, das gefunden wird $< a - 2$ oder

β) $> a - 2$, und das zugehörige x nicht in der Form $an \pm 1$ enthalten, oder endlich

γ) ist $z^2 > a - 2$, aber x zugleich in der Form $an \pm 1$ enthalten.

In den beiden ersten Fällen muß a nothwendig eine zusammengesezten Zal seyn, in dem dritten aber ist es zweifelhaft, ob a eine Primzal sey oder nicht; denn für Primzalen wird x immer von der leztern Form $an \pm 1$ seyn, und für zusammengesezte Zalen nur zuweilen. In diesem dritten Falle multiplicire man daher a mit einer beliebigen Zal b, und löse die Gleichung $abz^2 + 1 = x^2$ auf, wo man immer wenn a Factoren hat, auf den ersten oder zweiten Fall, und wenn es keine hat, auf den dritten gerathen wird.

Beispiele.

Es sey $a = 15$; so ist $15 \cdot 1^2 + 1 = 4^2$, aber $1^2 = 1 < 15 - 2$, folglich ist 15 eine zusammengesezte Zal. Ihre Faktoren sind $4 + 1$, und $4 - 1$ oder 5 und 3.

Es sey $a = 45$, also $45 \cdot 24^2 + 1 = 161^2$, hier ist $y = z^2 = 24^2 > 45 - 2$. Da aber x oder 161 nicht von der Form $45n \pm 1$ ist, so folgt, nach dem zweiten Falle, daß 45 eine zusammengesezte Zal seyn müsse. Um ihre Factoren zu finden, mache man $161 + 1$ und $161 - 1$, oder 162 und 160. Aber der gemeinschaftliche größte Theiler von 162 und 45 ist 9, und von 160 und 45 ist derselbe 5, mithin sind 9 und 5 die beiden Faktoren von 45.

Es

Es ſey $a = 87$, woraus $87 \cdot 3^2 + 1 = 28^2$. Aber $3^2 < 87 - 2$, mithin iſt, nach dem erſten Satze, 87 keine Primzal. Um die Faktoren zu finden, mache man $28 + 1 = 29$, nnd $28 - 1 = 27$. Aber 29 und 87 haben 29 zum gröſsten gemeinſchaftlichen Theiler, und von 27 nnd 87 iſt derſelbe $= 3$; folglich ſind die beiden Faktoren 29 und 3.

Es ſey $a = 91$; und man hat

$$91 \cdot 165^2 + 1 = 1574^2.$$

Hier iſt $y = z^2 = 165^2 > 91 - 2$. Da aber wiederum $x = 1574$ nicht in der Form $91n \pm 1$ enthalten, ſo iſt nach dem zweiten Fall 91 ebenfalls eine zuſammengeſezte Zal, deren Faktoren alſo gefunden werden: Es iſt

$$x + 1 = 1575, \text{ und } x - 1 = 1573;$$

aber der gröſste gemeinſchaftliche Theiler von 1575 und 91 iſt 7, und der von 1573 und 91 iſt 13; mithin ſind 7 und 13 die Faktoren von 91.

Es ſey $a = 85$, alſo $85 \cdot 30996^2 + 1 = 285771^2$. Da nun hier $30996^2 > 85 - 2$, und zugleich aber 285771 von der Form $85n + 1$ iſt, ſo läſst ſich, nach dem dritten Fall hieraus nichts ſchlieſſen. Man mache alſo $85 \cdot 3 = 255$ (indem man 85 mit dem willkührlichen 3 multiplicirt), und dann erhält man $255 \cdot 1^2 + 1 = 16^2$. Nun iſt

$$x + 1 = 17, \quad x - 1 = 15.$$

Alſo ſind 17 und 15 die Faktoren von 255, folglich 17 und 5 die Faktoren von 85.

Diß ist ungefehr der Geist von der Methode des Grafen von Schafgotsch. Daß sie für gewisse Werthe von a grosse und weitläufige Rechnung erfordert, bis man das kleinste z findet, das az^2+1 zu einem Quadrat in ganzen Zalen macht, liegt in der Natur der Sache, so wie auch der Umstand, daß, wenn $z^2 > a-2$, und x in der Form $an \pm 1$ enthalten ist, man a mit einer beliebigen Zal b multipliciren, und sodann mit abz^2+1 ebendieselbe Untersuchung von neuem vornehmen muß. Diß leztere ist besonders eine unangenehme Folge der, schon oben berührten, indirekten Verfahrungsart, nach welcher man anstatt $ay+1$, den Ausdruk az^2+1 zu einem Quadrat zu machen genöthiget ist. Eben deswegen geräth man auch öfters auf ungeheure Zalen. Zum Beispiel wenn die Theiler von 909191, oder vielmehr von $5 \cdot 909191$, d. i. von 4545955 gesucht werden, so erhält man nach einer sehr langen Rechnung, folgende Gleichung für $az^2+1 = x^2$,

$$4545955 \cdot (37074886179336725828048723088160784804513634289660763498655)^2 + 1 =$$

$$(790482741705651738629349656268492900551186678587245833797608 74)^2.$$

Nun ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von $x+1$ und 4545955, die Zal 1315, und der grösste gemeinschaftliche Theiler von $x-1$ und 4545955 die Zal 3457, mithin

$$1315 \cdot 3457 = 4545955 = 5 \cdot 909191$$

und daher $\frac{1315}{5} \cdot 3457 = 909191$, oder

$$263 \cdot 3457 = 909191.$$

In

In wie fern aber nun die von mir vorgeschlagene, oben aus einander gesezte Methode, länger, oder kürzer, als diese hier berührte ist, lasse ich hier unausgemacht, und begnüge mich, den Leser auf die sinnreichen Untersuchungen und Sätze des vortreflichen Verfassers der oben angeführten Abhandlung, aufmerksam gemacht zu haben.

III.

Probleme aus der unbestimmten Analytik.

1. Aufgabe.

Aus dem kleinsten Werthe p von x, welcher den Ausdruk $1 + a x^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen macht, eine unzählige Menge andrer Werthe ebenfalls in ganzen Zalen zu finden.

Auflösung.

Es sey $1 + a x^2 = y^2$, so ist

$ax \cdot x = A(y - 1)\,\frac{(y+1)}{A}$, wo A jede Grösse seyn kann.

Sezt man nun $\frac{ax}{A} = y - 1$; und $Ax = y + 1$;

so findet sich $x = \frac{2A}{A^2 - a}$.

Nun

Nun sey $A^2 - a = \frac{1}{p^2}$, so erhält man endlich $x = 2p\sqrt{(1+ap^2)}$.

Aus diesem neuen Werth von x läßt sich nun, wenn man ihn p heißt, ein dritter, und aus diesem wiederum ein vierter herleiten.

Beispiel.

In $1 + 3x^2$ ist $x = 1$ der kleinste Werth, der diesen Ausdruk zu einem wirklichen Quadrat macht. Sezt man also $p = 1$, so erhält man

$$x = 2\sqrt{(1 + 3.1)} = 4,$$

welcher Werth die Formel $1 + 3x^2$ ebenfalls in ein Quadrat verwandelt. Aus diesem findet sich $x = 56$ und so weiter in Unendliche.

Zusaz.

Durch die vorhergehende Auflösung werden nicht nur unzählige, sondern sogar alle mögliche Werthe von x gefunden, welche $1 + ax^2$ zu einem vollkommenen Quadrat in ganzen Zalen machen. Um diß zu beweisen, ist es genug, zu zeigen, daß zwischen dem Werth p von x, und dem unmittelbar darauf folgenden $2p\sqrt{(1+ap^2)}$ keine ganze Zal liegt, welche statt x gesezt, den Ausdruk $1 + ax^2$ in ein Quadrat verwandelt. Gesezt nehmlich, es gäbe eine solche Zal ω, daß also $1 + a\omega^2 = \nu^2$ wäre, so müßte also dieselbe, da sie zwischen p und $2p\sqrt{(1+ap^2)}$ liegt, $> p$ und $< 2p\sqrt{(1+ap^2)}$ seyn. Es sey daher $\omega = p + q$, mithin $\omega^2 = p^2 + 2pq + q^2$, und also $1 + ap^2 + 2apq + aq^2 = \nu^2$. Aber $\omega = p + q < 2p\sqrt{(1+ap^2)}$.

Also

also $q < 2p\sqrt{(1+ap^2)} - p$, und mithin $aq^2 < 5ap^2+4a^2p^4 - 4ap^2\sqrt{(1+ap^2)}$.

Ueberdiß ist $2apq < 4ap^2\sqrt{(1+ap^2)} - 2ap^2$, folglich $2apq + aq^2 < 3ap^2 + 4a^2p^4$, und also $1 + a\omega^2 > 1 + ap^2 + 3ap^2 + 4a^2p^4$, oder $> 1 + 4ap^2 + 4a^2p^4$.

Da aber, auf der andern Seite, nach der Voraussetzung, $\omega < 2p\sqrt{(1+ap^2)}$ seyn muß, und mithin auch $\omega^2 < 4p^2(1+ap^2)$ ist, so muß auch $1 + a\omega^2 < 1 + 4ap^2(1+ap^2)$, oder $< 1 + 4ap^2 + 4a^2p^4$ seyn. Also wäre $1 + a\omega^2$ zugleich grösser und kleiner, als der Werth $1 + 4ap^2 + 4a^2p^4$; welches unmöglich ist: folglich ist es auch nicht möglich, daß es ausser den zwei unmittelbar aufeinander folgenden Werthen p und $2p\sqrt{(1+ap^2)}$ noch einen andern dazwischen liegenden ω geben könne, der $1 + a\omega^2$ ebenfalls zu einem Quadrat in ganzen Zalen macht.

1. Saz.

Wenn in $f^2 + ax + bx^2$ der Coeffizient b nur um Eine Einheit kleiner ist, als ein Quadrat, so kann diese Formel zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden.

Beweiß.

Es sey $f^2 + ax + bx^2 = y^2$, so ist auch $\frac{x}{B}(a+bx).B = y^2 - f^2 = A(A-2f)$. Sezt man nun hier $\frac{x}{B} = A$, und $(a+bx)B = A - 2f$;

so

ſo findet ſich

$x = \frac{aB^2+2fB}{1-bB^2}$, oder, weil ſtatt des willkührlichen B auch $\frac{1}{B}$ geſezt werden darf.

$$x = \frac{a+2fB}{B^2-b}$$

oder endlich

$$x = \frac{a+2f\sqrt{(b+1)}}{b+1-b} = a+2f\sqrt{(b+1)}.$$

2. Saz.

Die Formel $f^2+ax+bx^2$ kann zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden, ſo oft b kein vollkommnes Quadrat iſt.

Beweiß.

Entweder iſt b um eine Einheit kleiner, als eine Quadratzal, oder um mehrere. Im erſten Fall iſt der Saz bereits erwieſen: Im andern ſetze man $x = my$, ſo verwandelt ſich

$f^2+ax+bx^2$ in $f^2+am.y+bm^2.y^2$.

Nun kann man aber immer einen ſolchen Werth für m in ganzen Zalen finden, daß $1+bm^2 = z^2$, folglich läßt ſich auch nach dem vorhergehenden Satze ein y finden, welches $f^2+amy+bm^2.y^2$ zu einem vollkommnen Quadrat in ganzen Zalen macht. Der Werth von y nach eben dieſem Satze

$$= am+2fz.$$

Beiſpiel.

Man ſoll $5^2+3x+11x^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen machen.

Es

Es sey $x = my$: so kommt es zuerst darauf an, m zu bestimmen, welches aus der Bedingung geschehen muß, daß $1 + 11 . m^2 = z^2$ ist. Nun ist hier $m = 3$, folglich $z = 10$; daher $y = 109$ und $x = 327$; welcher Werth auch Genüge leistet, denn er verwandelt obigen Ausdruk in $1177225 = 1085^2$.

Nach der Auflösung der ersten Aufgabe gibt es unzählig viele m, welche $1 + bm^2$ in ein Quadrat verwandeln: Es lassen sich also auch für $f^2 + ax + bx^2$ unzählig viele x finden.

Ueber die Verwandlung des Ausdruks: $f^2 + ax + b^2x^2$ in ein Quadrat in ganzen Zalen.

Bei dem vorhergehenden Satze wurde die wesentliche Bedingung zum Grund gelegt, daß b keine Quadratzal seyn durfte. Nun soll jezt auch untersucht werden, ob? und in welchen Fällen auch

$$f^2 + ax + b^2x^2$$

zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden könne, welche Untersuchung, wie wir bald sehen werden, von der größten Wichtigkeit ist.

Es sey demnach $f^2 + ax + b^2x^2 = y^2$, so folgt nach der bisher von mir gebrauchten Methode, daß

$$x = -\frac{a \pm \sqrt{(p^2 - 4b^2f^2 + a^2)}}{2b^2}$$

ist, wo p jede Zal vorstellet. Da aber eine allgemeine Auflösung dieser Formel äusserst schwer, und vielleicht unmöglich ist, so wollen wir einige besondre

besondre Fälle betrachten, die eine leichte Auflösung zulassen.

1) Es sey $b = f = 1$; woraus

$$x = -\frac{a \pm \sqrt{(p^2 - 4 + a^2)}}{2}$$

folgt. Ist nun a ungerad, so kann dieser Fall leicht auf den in der Abhandlung von den Theilern der Zalen bewiesenen ersten Saz zurükgeführt werden, wie aus folgendem Beispiele erhellet.

Beispiel.

Man soll ein x finden, das den Ausdruk $1 + 107x + x^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen macht.

Hier ist also $a = 107$, und demnach

$$x = -107 \pm \sqrt{\frac{(p^2 + 11445)}{2}}.$$

Aber $11445 = 15 \cdot 763$, mithin ist

$p = \frac{763 - 15}{2} = 374$ und also $x = 141$, welcher Werth den Ausdruk $1 + 107x + x^2$ in $34969 = 187^2$ verwandelt.

Da 11445 auch $= 5 \cdot 2289$ ist, so ist ein andrer Werth von p auch $= \frac{2289 - 5}{2} = 1142$, woraus $x = 520$ folgt; welcher Werth ebenfalls Genüge leistet, indem er den Ausdruk $1 + 107x + x^2$ in $326041 = 571^2$ verwandelt.

Endlich ist $11445 = 1 \cdot 11445$, woraus ein dritter Werth von $p = \frac{11445-1}{2} = 5222$ gefunden wird, aus welchem $x = 5616$ und $1 + 107x + x^2 = 8185321 = 2861^2$ entspringt.

Ist aber a gerade, so kann es Fälle geben, wo durch diese Methode nichts gefunden wird. Es sey, zum Beispiel, $1 + 6x + x^2$ in ein Quadrat zu verwandeln, so ist hier $a = 6$ und $\gamma(p^2 - 4 + a^2) = \gamma(p^2 + 32)$. Nun ist $32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$; folglich p entweder $\frac{32-1}{2}$, oder $\frac{16-2}{2}$ oder $\frac{8-4}{2}$; der erste und zweite Werth geben für x gebrochene Zalen, und aus dem dritten folgt $x = 0$, oder $x = -6$, welche beide Werthe zu nichts führen.

2) Es sey $b = 1$, so läßt sich $f^2 + ax + x^2$ in ein Quadrat verwandeln, wenn in $x = -\frac{a \pm \gamma(p^2 + a^2 - 4f^2)}{2}$ a und f so beschaffen sind, daß die unter dem Wurzelzeichen enthaltene Grösse mit a entweder gleich gerade, oder gleich ungerade ist. So findet sich z. B. in $34^2 + 72x + x^2$ für x der Werth $-\frac{72 \pm \gamma(p^2 + 560)}{2}$. Aber $560 = 16 \cdot 35$. Wenn also $p = 4q$ gesezt wird, so ist

$$x = -\frac{72 \pm 4\gamma(q^2 + 35)}{2}$$

Aber

Aber $35 = 5 \cdot 7$, also $q = \frac{7-5}{2} = 1$, folglich $x = -24$, und $x = -48$.

Wenn man den Ausdruk $f^2 + ax + b^2x^2$ nach der oben vorgetragenen Methode behandelt, so findet sich für x auch folgender Werth: $x = \frac{2fm-a}{b^2-m^2}$, wo m eine unbestimmte Zal ist, und hieraus folgt, daß obige Formel in dem besondern Fall zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden könne, wenn f und a mit einer dritten Grösse c theilbar sind, und überdiß $b = \sqrt{(c + m^2)}$ enthalten ist.

Beispiel.

Gesezt c sey 5, so ist $m = 2$, und $b = 3$. Wenn also z. B. $a = 5 \cdot 4$ und $f = 5 \cdot 6$, so wird $x = 20$ den Ausdruk $30^2 + 20x + 9x^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen machen.

Ueberhaupt lassen sich, um bei diesem Beispiel stehen zu bleiben, alle Ausdrücke zu vollkommnen Quadraten in ganzen Zalen machen, welche in der Formel $5^2f^2 + 5ax + 9x^2$ enthalten sind.

Wollte man für ein anderes b auf eine ähnliche Art eine unzählige Menge einzelner Fälle bestimmen, so sey $c = 7$, mithin $b = \sqrt{(7 + m^2)}$, also $m = 3$, folglich $b = 4$. Es sind daher alle Ausdrücke von dieser Form $7^2f^2 + 7ax + 16x^2$ leicht zu Quadraten zu machen.

Wenn zum Beiſpiel $f = 2$ und $a = 3$ iſt, ſo wird $x = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7}{7} = 9$ den Ausdruk $14^2 + 21x + 16x^2$ in ein Quadrat verwandeln. Es laſſen ſich demnach für jedes gegebene b diejenigen Werthe von f und a beſtimmen, bei welchen der Ausdruk $f^2 + ax + b^2x^2$ zu einem Quadrat in ganzen Zalen gemacht werden kann.

Anmerkung.

Das Rationalmachen des Ausdruks:

$$\sqrt{(f^2 + ax + b^2x^2)}$$

hat einen merkwürdigen Zuſammenhang mit dem berühmten Problem von den Theilern der Zalen, welches ganz hierauf zurük geführt werden kann.

Um diß zu zeigen, wollen wir mit Lambert *) annehmen, A ſey die Zal, deren Theiler geſucht werden, a die Quadratwurzel derſelben in ganzen Zalen, und b der Ueberreſt, und alſo $A = a^2 + b$. Ferner ſey der kleinere Theiler $a - x$, und der gröſſere $a + x + y$, ſo folgt hieraus, daß

$$2x + y = \sqrt{(4ay + y^2 - 4b)}$$

ſey, und mithin $\sqrt{(4ay + y^2 - 4b)}$ rational ſeyn müſſe. Nun ſey $4ay + y^2 - 4b = z^2$; ſo wird aus $4(ay - b) = (z - y)B\frac{(z + y)}{B}$ und $4B = z - y$ und $\frac{ay - b}{B} = z + y$; $y = \frac{b + 4B^2}{a - 2B}$ gefunden werden, welcher Ausdruk eine ganze Zal ſeyn muß.

Man

*) Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, 2. Theil, Theilung und Theiler der Zalen, §. 5, S. 6.

Man nehme also das willkührliche B so an, daß $a - 2B = 1$; so wird $y = b + (a-1)^2$ seyn.

Dieser Werth von y, den wir m heissen wollen, verwandelt nun zwar den Ausdruk $4ay + y^2 - 4b$ wirklich in ein Quadrat; allein man findet dadurch keine andre Theiler von A, als 1 und A selbst. Indessen ist dadurch doch schon ein Schritt weiter gethan; denn wenn man aufs neue $y = m + n$ sezt, so verwandelt sich $4ay + y^2 - 4b$ in

$$4am + m^2 - 4b + (4a + 2m)n + n^2,$$

aber $4am + m^2 - 4b$ ist ein Quadrat, dessen Wurzel wir f heissen wollen; folglich muß

$$f^2 + (4a + 2m)n + n^2;$$

oder $f^2 + ax + x^2$ zu einem Quadrat gemacht werden, wodurch also diß Problem auf das Rationalmachen der oben abgehandelten Formel reducirt worden ist.

Es seyen z. B. die Theiler von 35 zu suchen; so ist $a = 5$; $b = 10$ und also $m = 26$, hieraus ergiebt sich $f = 34$. Folglich muß $34^2 + 72n + n^2$ zu einem Quadrat gemacht werden. Wir haben aber eben diesen Fall schon oben in Gestalt eines Beispiels vorgetragen, und daselbst für n den Werth $= -24$ gefunden. Es ist demnach $y = 2$ und $x = 0$. Folglich $a - x = 5$, und $a - x + y = 7$.

Allein, da die oben vorgetragene Methode, den Ausdruk $\sqrt{(f^2 + ax + x^2)}$ rational zu machen, die Kenntniß der Faktoren der Zalen voraussezt, und sogar darauf gebauet ist, so wäre zu wünschen, daß ein anderer Weg eingeschlagen würde, den Ausdruk

$$\sqrt{(f^2 + ax + b^2 x^2)}$$

auf eine ſolche Art zu behandeln, daß dabei die von mir gebrauchte Bedingung nicht bereits zum Grund läge, und dann käme man durch die unbeſtimmte Analytik auf die zierlichſte Auflöſung des Problems der Theiler der Zalen und der Primzalen.

Von Verwandlung des Ausdruks $f^2 + dx^3$ in ein Quadrat.

Die Ausdrücke
$f^2 + ax + bx^2 + cx^3$; $f^2 + bx^2 + cx^3$ und $f^2 + ax + cx^3$ können alle, nach der bisher gezeigten Methode, in Quadrate verwandelt werden, und man wird dadurch für x ebendieſelben Werthe finden, die im zweiten Theile dieſes Werks ſtehen. Allein der Ausdruk $f^2 + dx^3$ macht ſowol bei der Euleriſchen, als auch bei der hier vorgetragenen Methode eine Ausnahme, indem kein allgemeiner rationaler Werth für x gefunden werden kann, weil es Fälle gibt, in welchen dieſer Werth unmöglich wird. Es kommt demnach darauf an, diejenigen einzelnen Fälle zu erörtern, in welchen jener Ausdruk zu einem vollkommenen Quadrat gemacht werden kann.

Man ſetze daher $f^2 + dx^3 = y^2$; ſo folgt aus

$$x^2 = \frac{(y+f)A}{d} \text{ und } x = \frac{g-f}{A},$$

daß $x = \frac{A^2 \pm \sqrt{(A^4 + 8fdA)}}{2d}$ ſeyn müſſe. Hieraus

aus können vorderſamſt folgende beſondere Fälle abgeleitet werden.

1) So oft $f^2 + d$ ein Quadrat iſt, ſo oft läßt ſich $\sqrt{(f^2 + dx^3)}$ rational machen; denn, wenn das willkührliche $A = 2f$ angenommen wird, ſo erhält man $x = \frac{2f^2 \pm \sqrt{(f^2+d)}}{d}$, welcher Werth auſſer demjenigen $x = 1$, ebenfalls Genüge leiſtet.

2) Wenn $f + d^2$ ein Quadrat iſt, ſo iſt obiger Ausdruk ebenfalls, und zwar in ganzen Zalen, auflösbar; denn für $A = 2d$ erhält man $x = 2d \pm 2\sqrt{(f + d^2)}$. So findet ſich, z. B. in $11^2 + 5x^3$ für x der Werth $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$, wodurch $11^2 + 5 \cdot 22^3$ in 231^2 verwandelt wird.

3) Wenn fd nur um eine Einheit kleiner iſt, als eine Quadratzal, ſo iſt $f^2 + dx^3$ leicht in ein vollkommnes Quadrat zu verwandeln, denn für $A = 2$ findet ſich $x = \frac{2 + 2\sqrt{(1+fd)}}{d}$.

Von dieſen ſehr leichten einzelnen Fällen wollen wir nun zu etwas allgemeineren Unterſuchungen übergehen.

Man ſetze alſo $A^4 + 8fdA = (A^2 + 2B)^2$, und $fd = c$, ſo findet ſich hieraus $A = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 - B^3}}{B}$, und $x = \frac{2A^2 + 2B}{2d} = \frac{2c^2 + 2c\sqrt{(c^2 - B^3)}}{dB^2}$

Damit also x rational sey, muß statt B ein solcher Werth genommen werden, daß $c^2 - B^3$ ein vollkommenes Quadrat wird. Hiebei kommt es nun einzig und allein auf die Beschaffenheit von fd oder c an; denn es gibt solche Werthe von c, für welche es unmöglich ist, ein B zu finden, so daß $c^2 - B^3$ ein vollkommnes Quadrat wird, und wieder andre, bei denen diß sehr leicht geschehen kann. Um diß zu zeigen, betrachten wir die Reihe der Quadrate der natürlichen Zalen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 =
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 =

11	12	13	14	15	ꝛc.
121	144	169	196	225	

und ziehen das erste Glied 1 von dem dritten 9 ab, ferner das dritte 9 von dem sechsten 36, das sechste von dem zehnten 100, das zehnte von dem fünfzehnten 225, dieses wieder von dem ein und zwanzigsten u. s. w., so bleiben die Cubi der natürlichen Zalen 8, 27, 64, 125, 216 u. s. w. übrig. Jede andre Quadrate, die man in obiger Reihe von einander abzieht, geben keine Cubiczalen zu Ueberresten. Mithin ist jede Cubiczal nur ein Unterschied von zwei Quadraten. Wenn demnach ein gegebenes c^2 entweder das dritte, sechste, zehnte, fünfzehnte, ein und zwanzigste ꝛc. Glied obiger Reihe ist, so läßt sich das zugehörige B leicht finden, das so ist, daß $c^2 - B^3 =$ einem vollkommenen Quadrat wird; denn wenn c z. B. das fünfzehnte Glied wäre, so dürfte von demselben nur das zehnte (oder das in der Reihe 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 ꝛc. unmittelbar vorhergehende) abgezogen werden, so müßte der Ueberrest eine Cubiczal seyn, deren Wurzel also B hiesse. Ist

aber

aber c^2 in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zalen nicht das dritte, sechste, zehnte ꝛc. Glied, sondern irgend ein dazwischen fallendes, so läßt sich auch auf diesem Weg kein B finden, das $c^2 - B^3$ zu einem vollkommnen Quadrat macht.

1. Beispiel.

Man soll den Ausdruk $2^2 + 18\,x^3$ in ein vollkommnes Quadrat verwandeln.

Hier ist also $f = 2$, $d = 18$ und fd oder $c = 36$. Da nun 36 in der Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 ꝛc. für welche der allgemeine Ausdruk $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, wirklich vorkommt, so ist dieser Fall auflösbar, und zwar findet sich $B = \sqrt[3]{(36^2 - 28^2)} = 8$; mithin ist $x = \frac{2 \cdot 36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 28}{18 \cdot 64} = 4$, welcher Werth den Ausdruk $2^2 + 18\,x^3$ in $1156 = 34^2$ verwandelt.

2. Beispiel.

Man soll $5^2 + 93\,x^3$ in ein Quadrat verwandeln. Hier ist $f = 5$, $d = 93$ und $c = 465$. Man setze also $\frac{m(m+1)}{2} = 465$, so findet sich $m = 30$, mithin ist 465 in obiger Reihe das dreißigste Glied, und sein Quadrat $= 216125$; und also ist das unmittelbar vorhergehende Glied $= \frac{29 \cdot 30}{2} = 435$, dessen Quadrat $= 180225$, folglich $B^3 = 216225 - 1809225$ oder $= 27000$, also $B = 30$, woraus $x = 10$ folgt.

3. Beiſpiel.

Man ſoll $7^2 + 19x^3$ in ein Quadrat verwandeln. Da hier $c = 133$, ſo ſetze man $\frac{m(m+1)}{2} = 133$. Nun findet ſich für m keine rationale Zal; mithin kommt 133^2 in obiger Reihe nicht vor, und folglich gibt es auch kein B. Es iſt alſo auf dieſem Weg unmöglich ein x zu finden, das den Ausdruk $7^2 + 19x^3$ in ein vollkommnes Quadrat verwandelt.

Aufgabe.

Aus einem Werth n welcher $f^2 + dx^3$ in ein Quadrat verwandelt, unzälige andre zu finden.

Auflöſung.

Man ſetze in $x = \frac{A^2 \pm \nu(A^4 + 8fdA)}{2d}$

$A = \frac{2f}{n}$; ſo wird $x = \frac{2f}{dn^2}\left(f \pm \nu(f^2 + dn^3)\right)$

Aber $f^2 + dn^3$ iſt ein wirkliches Quadrat; folglich iſt x rational. Heißt dieſer gefundene Werth m, ſo findet ſich wieder ein neuer, welcher

$$= \frac{2f}{dm^2}\left(f \pm \nu(f^2 + dm^2)\right)$$

iſt, und ſo ins Unendliche.

Wenn man dieſe Auflöſung mit derjenigen vergleicht, welche Euler im zweiten Theile §. 123 S. 246 gibt, und das daſelbſt befindliche Beiſpiel ebenfalls berechnet, ſo wird man ebendenſelben Werth von x finden, den Euler vergebens ſuchte, und

der

der ihn veranlaßte, ſeine Methode ſelbſt indirekt zu nennen.

Aufgabe.

Aus einem einzigen Werth B von x, welcher den Ausdruk $1 + dx^4$ in ein Quadrat verwandelt, unzälig viele andre zu finden.

Auflöſung.

In $x^2 = \frac{2A}{A^2 - d}$ ſetze man $A = 2m$, ſo wird

$x^2 = 4 \cdot \frac{m}{4m^2 - d}$. Nun ſey $4m^2 - d = y^2$,

und alſo $B^2(2m - y)\,\frac{2m + y}{B^2} = 1 \cdot d.$

Wenn nun $B^2(2m - y) = 1$ und $\frac{2m + y}{B^2} = d$

geſezt wird, ſo findet ſich

$$4m = \frac{1 + dB^4}{B^2} \text{ und } y = \frac{dB^4 - 1}{2B^2}$$

und alſo

$$x^2 = \frac{4B^2(1 + dB^4)}{(dB^4 - 1)^2}$$

Zuſaz.

Es muß demnach:

$1 + d(1 + dB^4) \cdot \left\{\frac{2B}{B^4 \cdot d - 1}\right\}^4$ ein Quadrat ſeyn.

Wenn

Wenn man also $(dB^4+1) \cdot d$ als den Coeffizienten von x^4 oder von $\left(\frac{2B}{dB^4-1}\right)^4$ ansiehet, und B verschiedne Werthe gibt, so lassen sich auf diese Art eine unzälige Menge von auflösbaren Fällen finden. Z. B. Wenn $d = 2$ und $B = 1$ angenommen wird, so findet sich, daß in $1 + 18x^4$ der Werth $x = 2$ diesen Ausdruk in ein Quadrat verwandelt. Für $B = 2$ findet sich in $1 + 2178x^4$, $x = \frac{4}{51}$.

IV.

Bemerkungen über die Formel $\frac{x^2-B}{A}$, wo A und B gegebene ganze Zalen sind, und x diejenige unbekannte ganze Zal vorstellt, deren Quadrat weniger B, durch A ohne Rest theilbar ist.

In einigen der vorhergehenden Kapiteln wurden mehrere der wichtigsten Auflösungen dahin zurükgeführt, daß es darauf ankomme, ein x zu finden, so daß, wenn A u. B gegebene ganze Zalen sind, x^2-B durch A ohne Rest theilbar werde. Es ist aber dieses wiederum ein eigenes sehr schwehres, und bisher noch nicht allgemein aufgelößtes Problem, das eigentlich in zwei andre zerfällt.

1) Wie kann man aus den gegebenen Grössen A und B beurtheilen, ob es möglich, oder unmöglich sey, ein x zu finden, so daß $\frac{x^2-B}{A}$ eine ganze Zal werde.

2)

2) Wie kann man, im Fall daß die Auflösung als möglich erkannt worden, die Werthe von x wirklich finden?

Die erste Frage hat De la Grange in einer vortreflichen Abhandlung aufgelößt, die sich in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1767 befindet, und den Titel führt:

Sur la Solution des Problemes indéterminés du second dégré.

Die andre aber ist, im Allgemeinen, noch unaufgelößt, und was man hiervon weiß, betrift blos einzelne Fälle. So lange indessen dieser Punkt nicht berichtiget ist, so lange sind auch die in den obigen Kapiteln vorgetragenen Sätze und Auflösungen, zum Theil, auf Errathen und Probiren gegründet, und müssen also, so sinnreich sie auch immer seyn mögen, als unvollständig betrachtet werden. Folgende Betrachtungen können vielleicht einiges Licht über diese Materie geben.

Die von De la Grange an angezeigtem Orte vorgetragene Methode, um zu erkennen, ob für ein gegebenes B und A ein x gefunden werden könne, so daß $x^2 - B$ ohne Rest durch A getheilt werden kann, ist zwar ungeachtet sie öfters viele Rechnungen erfordert, ganz allgemein, und in sofern wäre dann dieser Theil des Problems vollständig aufgelößt. Wenn aber gefragt wird, welche Werthe von B sind für ein gegebenes A diejenigen, wo die Auflösung unmöglich wird, und bei welchen ist hingegen dieselbe möglich? so würde die erwähnte Methode wegen der allzuvielen Rechnungen von sehr unbequemen Gebrauche seyn.

Es

Es scheint mir daher, daß in diesem Fall, folgende ungleich kürzer und leichter sey.

Problem.

Für ein gegebenes A in $\frac{x^2 - B}{A}$ alle diejenigen Werthe von B zu bestimmen, für welche es nothwendig ein x (das nach dem obenerwiesenen $< \frac{A}{2}$ ist), geben muß, das so beschaffen ist, daß $x^2 - B$ durch A theilbar wird.

Auflösung.

Man suche

1) Diejenige Quadratzal, die unmittelbar kleiner ist, als die Zal A; sie heisse m^2, und also ihre Wurzel m.

2) Hieraus findet sich sodann $2m + 1 = n$.

3) Man addire nun zu m^2 die ungerade Zal n, und ziehe A von der Summe ab, so ist dieser Unterschied der erste Werth von B. Er heisse a.

4) Man addire zu a die in der Reihe der natürlichen Zalen zunächst auf n folgende ungerade Zal, d. i. $n + 2$: so ist die Summe entweder kleiner als A, oder grösser. Im ersten Fall ist $n + 2$ der zweite Werth, im andern aber ziehe man A von $n + 2$ ab, so wird der Unterschied von $n + 2$ und von A der zweite Werth b von B seyn.

5) Zu diesem zweiten Werthe b addire man abermal die nächste auf $n + 2$ folgende ungerade

Zal, woraus sich ein neuer dritter Werth von B findet, und so fahre man fort, zu jedem neuen Werthe von B die, der Ordnung nach auf einander folgenden, ungeraden Zalen zu addiren, und wenn die Summe grösser als A ist, diese leztere Grösse davon abzuziehen, bis man zulezt (welches nach $\frac{A}{2}$ oder $\frac{A}{2} + 1$ Operationen immer geschehen muß) ebendieselben Werthe von B in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen siehet.

6) Hierzu kommen noch, als Werthe von B, alle Quadrate der Zalen von 1 bis n.

7) Alle diejenigen Zalen zwischen 1 und A welche nicht unter den gefundenen Werthen von B begriffen sind, sind solche bei denen, wenn sie statt B gesezt werden, der Ausdruk $\frac{x^2 - B}{A}$ nie eine ganze Zal werden kann, welchen Werth man auch für x annehmen mag.

Beispiel.

Man solle alle diejenigen Werthe von B in $\frac{x^2 - B}{31}$ finden, wodurch $x^2 - B$ durch 31 theilbar wird.

Hier ist also 25 die nächst kleinere Quadratzal, mithin $m = 5$; folglich $n = 11$.

Nun ist $25 + 11 = 36$; mithin $36 - 31 = 5$ der erste Werth von B.

Die

Die übrigen finden sich nach N° 4 und 5 also:

Erster Werth von	B =	5
Hiezu addirt n + 2 oder	=	13
Zweiter Werth von	B =	18
Hiezu addirt n + 4	=	15
		33
Abgezogen A oder		31
Dritter Werth von B	=	2
Hiezu addirt n + 6	=	17
Vierter Werth von B	=	19
Hiezu ꝛc.		19
		38
		31
Fünfter Werth von B	=	7
		21
Sechster Werth von B	=	28
		23
		51
		31
Siebenter Werth von B	=	20
		25
		45
		31
Achter Werth von B	=	14
		27
		41
		31

Neunter Werth von B = 10
29
39
31
Zehnter Werth von B = 8
31
39
31
Zehnter Werth von B = 8
33
41
31
Neunter Werth von B = 10

&c.

Da hier die Zalen 8, 10, 14 ꝛc. wiederum zum Vorschein kommen, so ist also die Operation bei dem zehnten Werth 8 aus, und es sind nach N° 6 nur noch 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, oder 1, 4, 9, 16, 25 als Werthe von B hinzuzufügen. Ordnet man nun die gefundnen 15 Werthe, so sind sie folgende:

Werthe von B	
B = 1	B = 10
B = 2	B = 14
B = 4	B = 16
B = 5	B = 18
B = 7	B = 19
B = 8	B = 20
B = 9	B = 25
	B = 28

folglich sind folgende Fälle auflösbar

$\frac{x^2-1}{31}$

$\frac{x^2-1}{31}$, $\frac{x^2-2}{31}$, $\frac{x^2-4}{31}$, $\frac{x^2-5}{31}$, $\frac{x^2-7}{31}$, $\frac{x^2-8}{31}$,

$\frac{x^2-9}{31}$, $\frac{x^2-10}{31}$, $\frac{x^2-14}{31}$, $\frac{x^2-16}{31}$, $\frac{x^2-18}{31}$,

$\frac{x^2-19}{31}$, $\frac{x^2-20}{31}$, $\frac{x^2-25}{31}$, $\frac{x^2-28}{31}$,

unauflösbar sind demnach

$\frac{x^2-3}{31}$, $\frac{x^2-6}{31}$, $\frac{x^2-11}{31}$, $\frac{x^2-12}{31}$, $\frac{x^2-13}{31}$,

$\frac{x^2-15}{31}$, $\frac{x^2-17}{31}$, $\frac{x^2-21}{31}$, $\frac{x^2-22}{31}$, $\frac{x^2-23}{31}$,

$\frac{x^2-24}{31}$, $\frac{x^2-26}{31}$, $\frac{x^2-27}{31}$, $\frac{x^2-29}{31}$ u. $\frac{x^2-30}{31}$.

Beweiß.

Alle Zalen sind in Absicht auf die Zal A so, daß sie durch A getheilt, entweder aufgehen, oder 1 zum Rest lassen, oder 2, 3 ꝛc. oder A − 1; sie lassen sich also nebst ihren Quadraten also vorstellen:

Zalen.	Quadrate.
nA	n^2A^2
nA ± 1	$n^2A^2 + 2nA + 1$
nA + 2	$n^2A^2 + 4nA + 4$
nA + 3	$n^2A^2 + 6nA + 9$
nA + 4	$n^2A^2 + 8nA + 16$
&c.	&c.
nA + (A−2)	$n^2A^2 + 2nA(A-2) + (A-2)^2$
nA + (A−1)	$n^2A^2 \pm 2nA(A-1) + (A-1)^2$

Geſezt alſo, 16 ſey dasjenige Quadrat, das unmittelbar kleiner als A iſt, ſo laſſen alle, von nA+1 bis nA + 4 enthaltene Quadrate, mit A getheilt, 1, 4, 9 oder 16 zum Ueberreſt: heiſſen dieſe Quadrate demnach α^2, β^2, γ^2, δ^2, ſo iſt $\alpha^2 = mA+1$, $\beta^2 = nA+4$, $\gamma^2 = pA+9$, $\delta^2 = qA+16$, mithin $\frac{\alpha^2-1}{A} = m$, $\frac{\beta^2-4}{A} = n$, $\frac{\gamma^2-9}{A} = p$ und $\frac{\delta^2-1}{A} = q$, wo alſo m, n, p und q ganze Zalen ſind.

Was ſodann die nach $(nA+4)^2$ folgenden Quadrate betrift, ſo ſind ihre zwei erſten Glieder n^2A^2+10nA ꝛc. jederzeit durch A theilbar. Ihre lezten Glieder 25, 36, 49, 64 ꝛc. aber als die Quadrate der natürlichen Zalen, wachſen nach der Ordnung der ungeraden Zalen, und da ſie, von 25 an, alle $> A$, ſo können ſie zwar ſämmtlich durch A getheilt werden, aber es entſtehen bei jeder Diviſion Ueberreſte, welche, gleich den Zalen 25, 36, 49, 64 ꝛc. in ebenderſelben Ordnung wachſen. Man darf alſo um dieſe Ueberreſte zu finden, die Theilung durch A nicht wirklich vornehmen, ſondern es iſt genug, wenn man die der Ordnung nach auf einander folgenden Zalen zum erſten Ueberreſte addirt, und jederzeit, wenn die Summe $> A$ iſt, dieſe leztere Gröſſe davon abziehet. Nun iſt in dem gegebenen Beiſpiele 25 das lezte Quadrat, das $< A$ iſt: mithin iſt das folgende $= 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 25 + 11 = 36$, und daher der erſte Werth von $B = 36 - A = 5$ u. ſ. w.

Aus der hier gegebenen Auflöſung ſiehet man, daß die Frage ob für ein gegebenes B und A ein x gefunden werden könne, wodurch $\frac{x^2-B}{A}$ einer ganzen

Zal

Zal gleich wird, nur ein besondrer Fall unsers Problems ist, indem wir für ein bestimmtes A, vermittelst einer immer eben so einfachen, als leichten Rechnung, alle Werthe von B, welche eine Auflösung möglich machen, und alle, wobei dieselbe unmöglich wird, finden gelehrt haben.

Wir kommen nun zur zweiten Frage: Für ein gegebenes A und B ein x in ganzen Zalen zu finden, so daß $\frac{x^2-B}{A}$ eine ganze Zal wird? Folgende Betrachtungen werden uns zur vollständigsten Auflösung dieses Problems führen: Wenn $\frac{x^2-a}{b}$ eine ganze Zal ist, so ist es auch $\frac{4x^2-4a}{b}$, $\frac{9x^2-9a}{b}$ $\frac{16x^2-16a}{b}$, $\frac{25x^2-25a}{b}$ 2c. 2c. Nun kann $\frac{x^2-1}{b}$ immer zu einer ganzen Zal gemacht werden, [weil $x^2-1=(x+1)(x+1)$, und daher sowol $x+1$ als auch $x-1$ der Grösse b gleich gesezt werden kann], mithin lassen sich auch $\frac{4(x^2-1)}{b}$, $\frac{9(x^2-1)}{b}$, $\frac{16(x^2-1)}{b}$ 2c. zu ganzen Zalen machen. Aus diesen ganz einfachen Prämissen fließt nun folgende Methode, die wir, desto grösserer Deutlichkeit wegen, sogleich an einem Beispiele darthun wollen.

Man soll dasjenige x finden, das so ist, daß $\frac{x^2-19}{31}$ einer ganzen Zal gleich wird.

Man verfertige folgende Tabelle:

1	$\frac{x^2-1}{31}$	$= \frac{x^2-1}{31}$	
4	$\frac{4x^2-4}{31}$	$= \frac{(x^I)^2-2^2}{31}$	
9	$\frac{9x^2-9}{31}$	$= \frac{(x^{II})^2-3^2}{31}$	
16	$\frac{16x^2-16}{31}$	$= \frac{(x^{III})^2-4^2}{31}$	
25	$\frac{25x^2-25}{31}$	$= \frac{(x^{IV})^2-5^2}{31}$	
36	$\frac{36x^2-36}{31}$	$= \frac{(x^V)^2-5}{31}$	-1
49	$\frac{49x^2-49}{31}$	$= \frac{(x^{VI})^2-18}{31}$	-1
64	$\frac{64x^2-64}{31}$	$= \frac{(x^{VII})^2-2}{31}$	-2
81	$\frac{81x^2-81}{31}$	$= \frac{(x^{VIII})^2-19}{31}$	-2
			100

In die erste Kolonne setze man die Quadrate der natürlichen Zalen; 1, 4, 9, 16 ꝛc.; in die zweite das Produkt jedes dieser Quadrate, z. B. von 9 in $\frac{x^2-1}{31}$, (woraus also für diesen Fall $\frac{9x^2-9}{31}$ entspringt).

100	$\frac{100x^2-100}{31}$	$=\frac{(x^{IX})^2-7}{31}$	-3
121	$\frac{121x^2-121}{31}$	$=\frac{(x^{X})^2-28}{31}$	-3
144	$\frac{144x^2-144}{31}$	$=\frac{(x^{XI})^2-20}{31}$	-4
169	$\frac{169x^2-169}{31}$	$=\frac{(x^{XII})^2-14}{31}$	-5
196	$\frac{196x^2-916}{31}$	$=\frac{(x^{XIII})^2-10}{31}$	-6
225	$\frac{225x^2-225}{31}$	$=\frac{(x^{XIV})^2-8}{31}$	-7
256	$\frac{257x^2-256}{31}$	$=\frac{(x^{XV})^2-8}{31}$	-8

ſpringt). Die dritte Kolonne iſt mit der zweiten gleich, nur daß ſtatt $9x^2$, $16x^2$ ꝛc. ein einziger Buchſtabe geſezt, und von 36 an, jedes zweite Glied als 36 49, 64 ꝛc. wirklich mit 31 dividirt worden. Dieſe Kolonnen ſeze man nun ſo weit fort, bis die Zal B, alſo hier 19, entweder wirklich zum Vorſchein kommt, (wie hier in der neunten Reihe) oder bis in zwei auf einander folgenden Reihen ebendaſſelbe B (wie hier in den zwei lezten Reihen) erſcheint, welches nach dem oben erwieſenen Saze immer geſchehen muß.

Man ſiehet alſo bei $\frac{x^2-19}{31}$ nicht nur, daß

dieſer Fall unter die auflösbaren gehört, ſondern die Auflöſung ſelbſt hat nun keine Schwierigkeit mehr; denn, wenn $\frac{x^2-19}{31}$ eine ganze Zal ſeyn ſoll, ſo muß auch $\frac{x^2-19}{31} - 2$, oder $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31} - 2$, das iſt: $\frac{(x^{VIII})^2-81}{31}$ eine ganze Zal ſeyn. Aber $\frac{(x^{VIII})^2-81}{31} = \frac{(x^{VIII}+9)\ (x^{VIII}-9)}{31}$.

Sezt man nun $x^{VIII} + 9 = 31$, ſo findet ſich $x^{VIII} = 22$, welcher Werth auch wirklich den Ausdruk $\frac{x^2-19}{31}$ in $\frac{22^2-19}{31}$ oder 15 verwandelt. Nähme man aber $x^{VIII} - 9 = 31$, ſo fände ſich $x^{VIII} = x = 40$, und $\frac{x^2-19}{31}$ wäre $= 51$. Käme aber B in dem zweiten Gliede des Zälers der dritten Kolonne gar nicht zum Vorſchein, ſo wäre diß, nach dem obigen ein Beweiß, daß es für dieſes B und A unmöglich wäre, ein x zu finden, das die Frage auflößte.

So wäre alſo das Problem $\frac{x^2-B}{A}$ in eine ganze Zal zu verwandeln, auf eine eben ſo allgemeine als leichte Art aufgelößt. Die erſte und zweite Kolonne erfordern gar keine Rechnung, weil die Quadrate der natürlichen Zalen bereits bekannt, und in Tabellen gebracht ſind. Nur die dritte Kolonne, worinn dieſe

Qua-

Quadrate durch A der Ordnung nach müssen dividirt, und die Quotienten und Ueberreste bemerkt werden, erfordert einige Mühe, obgleich auch die jedesmaligen Ueberreste, nach dem oben gezeigten, ganz leicht und ohne Division gefunden werden können. Die Hauptschwierigkeit beruhet also auf den Quotienten, welche aber ebenfalls leicht zu finden sind, da, wegen den bereits bekannten Ueberresten nur die ganzen Zalen genommen werden dürfen.

Anmerkung.

Da in $\frac{x^2-19}{31}$ der Werth $x = 9$ diese Grösse ebenfalls zu einer ganzen Zal nemlich zu 2 macht; so könnte man sich wundern, daß unsere Methode nicht ebenfalls diesen Werth $x = 9$, sondern einen grössern gegeben hat. Allein es war im bisherigen nur darum zu thun, zu zeigen, wie ein Werth, also eben nicht der kleinste, gefunden werden könne. Indessen begreift doch wirklich der Ausdruk $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31} - 2$ alle mögliche Auflösungen in sich. Fragt man nemlich nach demjenigen x, welches diesen Ausdruk, und also den Theil $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31}$ zur kleinsten ganzen Zal macht, so setze man $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31} - 2 = 0$, woraus sich sodann $x^{VIII} = 9$ ergibt. Wollte man aber grössere Werthe für x, so mache man überhaupt $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31} - 2$ oder $\frac{(x^{VIII})^2-81}{31} = a$, und da $(x^{VIII})^2 - 81 = (x^{VIII} + 9)(x^{VIII} - 9)$ ist, so sey $x^{VIII} \pm 9 = 31b$, also $x^{VIII} = 31b \pm 9$, so

wird also $a = b(31b \pm 18)$; welcher Ausdruk alle mögliche Werthe von $\frac{(x^{VIII})^2-19}{31} - 2$ vorstellt, und wegen dem willkührlichen b eine unendliche Menge von x^{VIII} darstellt, welche alle der Bedingung Genüge leisten.

Um diese Methode durch noch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es soll $\frac{x^2-13}{101}$ zu einer ganzen Zal gemacht werden. Hier kommt also die Rechnung so zu stehen:

1	$\frac{x^2-1}{101}$
4	$\frac{4x^2-4}{101} = \frac{X^2-2^2}{101}$
	2c. 2c.
100	$\frac{100x^2-100}{101} = \frac{X^2-100}{101}$
121	$\frac{121x^2-121}{101} = \frac{X^2-20}{101} - 1$
144	$\frac{144x^2-144}{101} = \frac{X^2-43}{101} - 1$
169	$\frac{169x^2-169}{101} = \frac{X^2-68}{101} - 1$
196	$\frac{196x^2-196}{101} = \frac{X^2-95}{101} - 1$

225

225	$\frac{225x^2-225}{101}$	$= \frac{X^2-23}{101} -$	2
256	$\frac{256x^2-256}{101}$	$= \frac{X^2-54}{101} -$	2
289	— — — —	$\frac{X^2-87}{101} -$	2
324	— — — —	$\frac{X^2-21}{101} -$	3
361	— — — —	$\frac{X^2-58}{101} -$	3
400	— — — —	$\frac{X^2-97}{101} -$	3
441	— — — —	$\frac{X^2-37}{101} -$	4
484	— — — —	$\frac{X^2-80}{101} -$	4
529	— — — —	$\frac{X^2-24}{101} -$	5
576	— — — —	$\frac{X^2-71}{101} -$	5
625	— — — —	$\frac{X^2-19}{101} -$	6
676	— — — —	$\frac{X^2-70}{101} -$	6

$$
\begin{array}{r|l}
729 & \frac{X^2-22}{101} - 7 \\
784 & \frac{X^2-77}{101} - 7 \\
841 & \frac{X^2-33}{101} - 8 \\
900 & \frac{X^2-92}{101} - 8 \\
961 & \frac{X^2-52}{101} - 9 \\
1024 & \frac{X^2-14}{101} - 10 \\
1089 & \frac{X^2-79}{101} - 10 \\
1156 & \frac{X^2-45}{110} - 11 \\
1225 & \frac{X^2-13}{101} - 12
\end{array}
$$

Da hier 13 zum Vorschein kommt, so bricht die Rechnung also bei dieser Stelle ab. Um nun den kleinsten Werth von X zu bekommen, mache man $\frac{X^2-13}{101} - 12 =$ der kleinsten bejahten Zal, d. i. $= 0$, so findet sich $X^2 = 1225$; also X oder $x = 35$.

welcher

welcher Werth den Ausdruk $\frac{x^2-13}{101}$ in 12 verwandelt.

Der Ausdruk $\frac{x^2+D}{A}$ kann ganz auf $\frac{x^2-B}{A}$ zurükgeführt werden. Denn, wenn $\frac{x^2+D}{A}$ eine ganze Zal iſt, ſo muß auch $\frac{x^2+D}{A} - 1$ oder $\frac{x^2+D-A}{A}$, das iſt: $\frac{x^2-(A-D)}{A}$ oder $\frac{x^2-B}{A}$ eine ganze ganze Zal ſeyn, und umgekehrt, wenn $\frac{x^2-B}{A}$ keine ganze Zal iſt, ſo kann auch $\frac{x^2-B}{A}+1$, oder $\frac{x^2-B+A}{A}$ d. i. $\frac{x^2+D}{A}$ keine ſeyn.

Anmerkung.

Die Rechnung, um den kleinſten Werth für x in $\frac{x^2-B}{A}$ zu finden, kann noch dadurch beträchtlich abgekürzt werden, daß es eben nicht nöthig iſt, die drei Kolonnen, wie ſie hier der Deutlichkeit wegen vorgeſtellt ſind, auch wirklich alſo zu entwickeln. Es iſt nemlich ſchon genug, nach obigem alle Unterſchiede oder Werthe von B zu berechnen, bis man auf den vorgegebenen kommt, dieſe Werthe hierauf abzuzälen und zu der gefundenen Zal die Anzal derjenigen Quadrate zu addiren, die vor A hergehen.

So ist z. B. in $\frac{x^2-19}{31}$, 19 der vierte Unterschied, oder vierte Werth, von B, und vor 31 gehen die fünf Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 her; also ist der kleinste Werth von $x = 4 + 5 = 9$.

Eben so ist beim zweiten Beispiel $\frac{x^2-13}{101}$, 13 der 25ste sich entwickelnde Unterschied, und vor 101 gehen zehn Quadratzalen her: also ist

$$x = 25 + 10 = 35 \text{ u. s. w.}$$

1. Beispiel.

Es sey $\frac{x^2+3}{31}$ in eine ganze Zal zu verwandeln. Hier muß also auch $\frac{x^2+3}{31} - 1$, oder $\frac{x^2-28}{31}$ eine ganze Zal seyn. Nun ist, nach obigem Beispiele, dieser leztere Ausdruk unter den möglichen Fällen: Folglich muß auch $\frac{x^2-28}{31} + 1$, d. i. $\frac{x^2+3}{31}$ eine ganze Zal werden können. Aber um das kleinste x zu finden, das $\frac{x^2-28}{31}$ zu einer ganzen Zal macht, muß $\frac{(x^x)^2-28}{31} - 3 = 0$ gesezt werden: daraus findet sich x^x oder $x = 11$, und eben dieser Werth verwandelt auch den Ausdruk $\frac{x^2+3}{31}$ in eine ganze Zal, nemlich in 4.

2.

2. Beiſpiel.

Es ſey $\frac{x^2+5}{31}$. Dieſe Frage reduzirt ſich auf $\frac{x^2+5}{31} - 1$, d. i. auf $\frac{x^2-26}{31}$. Da aber dieſer Fall, nach dem obigen Beiſpiel, unter die Unmöglichen gehört; ſo ſucht man auch vergebens ein x in ganzen Zalen, wodurch $\frac{x^2+5}{31}$ eine ganze Zal würde.

V.

Eine beſondere Methode, den Ausdruk $\frac{a + bx + dx^2}{c}$ in eine ganze Zal zu verwandeln, wo a, b, d, c gegebene ganze Zalen, und x die unbekannte, ebenfalls in ganzen Zalen auszudrückende Gröſſe, vorſtellt.

Das Problem, ein x zu finden, wodurch

$$\frac{a + bx + dx^2 + ex^3 + \text{ꝛc.}}{c}$$

einer ganzen Zal gleich wird, gehört unter die ſchwerſten der unbeſtimmten Analytik, und die allgemeinſte Auflöſung deſſelben ſcheint mit beinahe unauflöslichen Schwierigkeiten verknüpft zu ſeyn. Bis nun dieſe einmal erfolgt, bleibt alſo, auſſer dem von de la Grange angezeigten Wege, nichts übrig, als einzelne Fälle zu erörtern, wovon beſonders derjenige

$$\frac{a + bx + dx^2}{c}$$

einer kurzen und zierlichen Auflöſung fähig iſt.

Es

Es ist nemlich $\frac{a+bx+dx^2}{c}$ = einer ganzen Zal = p, (wo ich voraussetze, daß a, b und d insgesammt < c sind, weil, wenn sie grösser wären, c in dieselben dividirt werden könnte, und mithin also nur die Ueberreste, die jederzeit < c sind, in Betrachtung kämen,) folglich ist

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{(4cdp - 4ad + b^2)}}{2d}$$

Nun sey $b^2 - 4ad = B$, und $4cd = D$; so ist

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{(Dp + B)}}{2d}.$$

Es sey ferner $Dp + B = z^2$, also $p = \frac{z^2 - B}{D}$,

so wird $x = -\frac{b \pm z}{2d}$ seyn.

Man suche also, nach dem Obigen, für D und B dasjenige z, wodurch $\frac{z^2 - B}{D}$ eine ganze Zal p wird. Findet sich kein z, so ist es auch nicht möglich, ein x zu finden, das der Bedingung Genüge leistet, und dieser Fall gehört sodann unter die unauflöslichen. Findet sich aber ein z, das $\frac{z^2 - B}{D}$ zu einer ganzen Zal macht, so lassen sich, nach den oben vorgetragenen Sätzen, unzählig viele andere daraus herleiten, wo es denn nun noch darauf ankommt, zu bestimmen, ob, und welche von diesen Werthen für z so sind, daß $x = -\frac{b \pm z}{2d}$ = einer

ganzen Zal ist. Wir haben aber oben gezeigt, daß wenn z derjenige Werth von x ist, der $\frac{x^2-B}{D}$ zu einer ganzen Zal macht, auch der Werth $Dp' + z$, (wo p' jede ganze Zal seyn kann,) eben das leiste. Es muß demnach

$$x = -\frac{b \pm Dp' \pm z}{2d} \text{ oder } -\frac{b \pm z \pm Dp'}{2d}$$

eine ganze Zal seyn. Sezt man also $-b \pm z = \alpha$, und $2d = \beta$, so kommt es darauf an, ein solches p' zu finden, daß $\frac{\alpha \pm Dp'}{\beta}$ eine ganze Zal wird, welches Problem nicht die geringste Schwierigkeit hat.

1. Beispiel.

Ein x in ganzen Zalen zu finden, so daß der Ausdruk $\frac{2+3x+x^2}{7}$ eine ganze Zal wird.

Auflösung.

Hier ist also $a = 2$, $b = 3$, $d = 1$, und $c = 7$; mithin $b^2 - 4ad = B = 1$, und $4cd = D = 28$; also $p = \frac{z^2-1}{28} = (z+1)\frac{(z-1)}{28}$

Sezt man also $z + 1 = 28$, so wird $z = 27$, und $x = -\frac{b \pm z}{2d} = -\frac{3 \pm 27}{2} = 12$ oder $= -15$, welche beide Werthe Genüge leisten, und den Ausdruk

druk $\frac{2+3x+x^2}{7}$ in 26 verwandeln. Auſſer dieſem Werth von z kann man auch jeden andern in dem Ausdruk 28 p′ + 27 enthaltenen ſetzen, ſo daß alſo allgemein $x = -\frac{3 \pm 28p' \pm 27}{2}$ oder = 14 p′ + 12 iſt, wo ſtatt p′ jede ganze Zal geſezt werden darf.

2. Beiſpiel.

Es ſey $\frac{5+11x+3x^2}{13}$. Hier iſt a = 5, b = 11, d = 3, und c = 13. Alſo B = 61 und D = 156, mithin $p = \frac{z^2-61}{156}$. Stellt man nun nach obigen Grundſätzen die daſelbſt angezeigte Differenzenrechnung an, ſo findet ſich 61 als der eilfte Werth B, und da vor 156 zwölf Quadrate hergehen, ſo iſt z = 11 + 12 = 23; alſo $x = -\frac{11+23}{6}$ = 2, welcher Werth die Formel $\frac{5+11x+3x^2}{13}$ in 3 verwandelt. Da aber ſtatt z auch der Werth 156 p′ + 23 geſezt werden darf, ſo iſt alſo der allgemeine Ausdruk für alle x, wodurch $\frac{5+11x+3x^2}{13}$ eine ganze Zal wird, = 2 + 26 p′, wo p′ jede ganze Zal ſeyn kann. Es verwandeln demnach die Werthe x=2, x=28, x=54, x=80 ꝛc. den Ausdruk $\frac{5+11x+3x^2}{13}$ in eine ganze Zal.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

VI.

Lehrſaz.

Die Summe zweier Cubiczalen kann kein Cubus ſeyn.

Beweiß.

Geſezt, es wäre $f^3 + x^3 = y^3$; ſo müßte

$$fA \cdot \frac{f^2}{A} = (y-x)(y^2+xy+x^2)$$

ſeyn, wo A jede beliebige Gröſſe ſeyn kann. Macht man nun $fA = y - x$, und $\frac{f^2}{A} = y^2 + xy + x^2$, ſo iſt $x^2 + fA\,x = \frac{(1-A^3)f^2}{3A}$, und mithin

$$x = -\frac{fA}{2} \pm \frac{f}{6A}\sqrt{(12A - 3A^4)}$$

Nun iſt A eine willkührliche Gröſſe; mithin enthält dieſe Formel alle Werthe von x, deren Cubus zu f^3 addirt, wieder einen Cubum gibt. Wenn demnach erwieſen werden kann, daß es keinen einzigen Werth für A gibt, (ausgenommen $A = 1$), der

der ſo iſt, daß x rational wird, ſo iſt alſo auch allgemein erwieſen, daß, auſſer den aus $A = 1$ folgenden Werthen für x, kein einziger zu f^3 addirt, einen Cubum hervorbringt.

Alles kommt daher darauf an, zu beweiſen, daß der Ausdruk $\sqrt{(12A - 3B^4)}$, und alſo auch x nie rational werden kann, auſſer in dem Falle, da $A = 1$ geſezt wird. Zu dieſem Ende mache man folgende Schlüſſe: entweder iſt $A = 2$, oder > 2, oder < 2. In den beiden erſten Fällen iſt $12A - 3A^4$ eine verneinte Gröſſe, und alſo ihre Wurzel unmöglich. Im dritten Fall iſt A entweder > 1, oder < 1. Es ſey daher $A = 1 \pm \frac{1}{q}$, ſo muß $12A - 3A^4$ oder $\frac{9q^4 - 18q^2 \mp 12q - 3}{q^4}$, und demnach auch der Zäler dieſes Bruchs ein Quadrat ſeyn. Da aber jedes ächte Quadrat, das mit 3 theilbar iſt, auch mit 9 theilbar ſeyn muß, und $9q^4 - 18q^2 \mp 12q - 3$ zwar mit 3, aber nicht mit 9 theilbar iſt; ſo kann dieſe Gröſſe kein ächtes Quadrat ſeyn. Es gibt alſo, auſſer dem Werth $A = 1$, keinen andern, weder in ganzen noch gebrochenen Zalen, wodurch $\sqrt{(12A - 3A^4)}$ rational wird; folglich gibt es auch kein x, deſſen Cubus zu f^3 addirt, wieder eine Cubiczal hervorbringt, ausgenommen diejenigen beiden Werthe für x, die aus $A = 1$ folgen, nemlich: $x = -\frac{f}{2} \mp \frac{f}{2}$, alſo entweder $x = 0$, oder $x = -f$.

Zuſaz.

Zuſaz.

Auf eine ähnliche Art kann auch gezeigt werden, daß es für ein gegebenes f kein x gibt, das ſo iſt, daß $f^4 + x^4 = y^4$ wird. Denn aus $Ax^2 = y^2 + f^2$, und $\frac{x^2}{A} = y^2 - f^2$, folgt

$$x^2 = \frac{y^2}{(A^2-1)^2} \times 2.(A-1)A(A+1)$$

Es iſt aber leicht zu erweiſen, daß $2(A-1)A(A+1)$ nie ein vollkommnes Quadrat werden kann: folglich ꝛc.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Tabelle

Tabelle

über die in dem Anhange enthaltenen Abhandlungen.

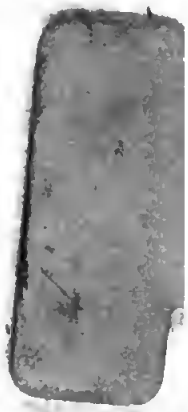
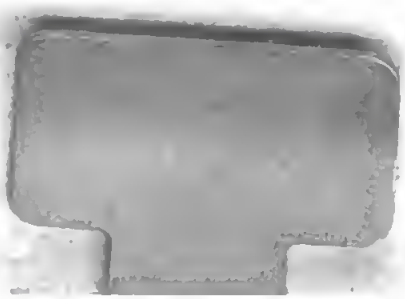
I. Allgemeiner Beweiß des Binomischen Lehrsatzes. . . . . S. 247

II. Neue Methode, die Theiler der Zalen zu finden. 269

III. Auflösungen einiger Probleme aus der unbestimmten Analytik. . 284

IV. Bemerkungen über die Formel $\frac{x^2-B}{A}$, wo B und A gegebene ganze Zalen sind, x aber diejenige unbekannte ganze Zal vorstellt, welche dieser Ausdruk zu einer ganzen Zal macht. . . 301

V. Eine besondere Methode, den Ausdruk $\frac{a+bx+dx^2}{c}$ in eine ganze Zal zu verwandeln, wo a, b, d und c gegebene ganze Zalen, und x die unbekannte, ebenfalls in ganzen Zalen auszudrückende, Grösse vorstellt. . . 320

VI. Beweiß, daß die Summe zweier Cubiczalen kein Cubus seyn könne. . 324

Bayerische Staatsbibliothek München